

Цена 15 р.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ИМПУЛЬСОВ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ
ПРИ
ПЕРЕДАЧЕ ИМПУЛЬСОВ

« СОВЕТСКОЕ РАДИО »

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ИМПУЛЬСОВ

*ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
ТЕЛЕВИЗИОННОЙ И РАДИОЛОКАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ*

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. Я. БРЕЙТБАРТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКОЕ РАДИО»
МОСКВА—1951



Книга представляет собой перевод монографии С. Cherry „Pulses and Transients in communication circuits“.

В ней в доступной форме изложена теория переходных процессов и связанных с ними явлений в электрических цепях. Рассмотрены переходные процессы в усилительных каскадах при передаче боковых полос искажения колебаний и поведение электрических цепей под воздействием импульсов малой длительности.

Книга рассчитана на радиоспециалистов и может быть использована в качестве учебного пособия для студентов и преподавателей ВУЗов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга задумана как введение в анализ переходных процессов для инженеров-связистов и должна служить мостом для перехода от теории переменных токов к операторным методам анализа. Бóльшая часть опубликованных в последние годы работ, посвященных переходным процессам в цепях связи, по форме и стилю являются математическими, причем некоторые из них относятся непосредственно к специальным вопросам таких отраслей радиотехники, как телевидение, импульсная модуляция, радиолокация и т. п. Математический подход к изучению этих явлений представляет определенные трудности для многих инженеров, недостаточно знакомых с современными методами высшей математики.

Большая трудность, с которой приходится сталкиваться лицам, желающим пополнить свои знания изучением теории переходных процессов (что становится все более необходимым), заключается в незнании с чего начинать.

Цель настоящей книги и состоит в том, чтобы дать таким читателям необходимые основы, пользуясь, где это можно, строгими физическими доказательствами и математикой в пределах, доступных для среднего инженера. Введен ряд упрощений в математических выводах и обозначениях: вместо аналитических функций применены графики электрических колебаний, что придало книге геометрический (или „осциллографический“) характер.

В первой главе, очень элементарной, рассмотрен физический смысл решений дифференциальных уравнений, получающихся для большинства линейных цепей в экспоненциальной форме, и необходимость частного и общего решений. Формы колебаний и спектры электрических сигналов рассмотрены детальнее во второй главе с применением рядов Фурье. Подчеркнута простота системы сопряженных векторов, которая необходима в следующей главе при рассмотрении

характеристик избирательности схем и более детальном изучении их основных физических и геометрических свойств.

Ограничения, которые налагают эти свойства на распространение волн и неустановившихся сигналов в схемах, являются содержанием четвертой главы. В следующей главе рассматриваются различные способы упрощения расчета переходных процессов, вытекающие из применения „идеализированных характеристик“. Важное значение подобных характеристик, заключающееся в существенных математических упрощениях, нельзя недооценивать, но необходимо проявлять большую осторожность, чтобы избежать неверных выводов при слишком точной интерпретации полученных результатов.

В шестой главе рассмотрены переходные процессы в усилительных каскадах канала связи, причем основное внимание уделено точности воспроизведения сигнала, что имеет большое значение для расчета многих широкополосных усилителей, например, применяемых в телевидении.

Специфические явления, вытекающие вследствие неодинаковой передачи боковых полос модулированных колебаний (как, например, в однополосных или асимметричных каналах), рассмотрены в литературе в большинстве случаев слишком приближенно. Седьмая глава предназначена для восполнения этого пробела. В этой же главе изложен простой метод, с помощью которого можно определить искажения установившихся или устанавливающихся колебаний при любой глубине модуляции и любых характеристиках канала.

В последней главе рассмотрено поведение схем под воздействием импульсов очень малой длительности. Кроме физического представления об искажении сигналов, получаемого в результате использования явления отражения, это дает также картину преобразований Фурье на основе обратных зависимостей между временем и частотой, без сложных математических выводов.

ГЛАВА I

ОСНОВЫ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

I. Введение

Интерес инженеров к переходным процессам в цепях, особенно в цепях связи, непрерывно повышается. Это объясняется отчасти большим размахом работ по радиолокации, которая привлекала в течение последних лет внимание многих специалистов, а также развитием телевидения, фототелеграфии, быстродействующей телеграфии в послевоенные годы. В этих и других отраслях радиотехники перед инженером постоянно встает вопрос об искажении формы сигнала. Недостаточно рассчитать полосу пропускания или избирательность схемы. Необходимо знать, как будет вести себя схема при воздействии на нее колебаний определенной формы, например, импульсов волн с крутым фронтом и других сигналов. Должны быть обеспечены определенные характеристики цепей и способность канала воспроизводить на выходе сигналы, форма которых возможно более точно соответствует форме сигналов, поданных на его вход.

Возросший интерес широких кругов инженеров к вопросам переходных процессов в цепях не означает, что эти вопросы возникли только в течение последних лет. Задача о воздействии на схему внезапно приложенной электродвижущей силы и о форме вызываемого ей сигнала имела важное значение еще в начале развития электрической связи. Это было вполне естественно, так как законы, определяющие процессы в схеме при внезапно приложенной э. д. с., выводились из дифференциальных уравнений для контуров цепи, в которые входят токи и напряжения в функции времени. Решение этих уравнений приводит к понятию о переходном и установившемся режимах; первый определяет токи и напряжения, возникающие при внезапном приложе-

нии э. д. с., а второй — токи и напряжения, устанавливающиеся в схеме по окончании переходного процесса.

Изучение решений для установившегося режима привело к развитию общей теории переменных токов и применению в ней векторных диаграмм.

Отчасти вследствие повсеместного внедрения в преподавание теории переменных токов при ее относительной математической простоте, а также вследствие широкого производства измерительных приборов и другой аппаратуры для переменных токов синусоидальной формы, в основе теоретических и практических знаний рядового инженера лежат понятия о синусоидальных колебаниях. Он хорошо знаком с применением векторов в теории переменных токов, но переход к анализу неустановившихся процессов связан для него во многих случаях с большими трудностями. Для большинства лиц представление об этом анализе соединено с понятием о сложных операторных методах, доступных только профессионалам-математикам. Вместе с тем часто требуется лишь приближенное решение задачи, дающее общее представление о переходных процессах в цепи, вследствие чего целесообразность применения для этой цели сравнительно сложных математических методов может оказаться сомнительной.

В этой книге не будут применяться строгие математические доказательства, но можно надеяться, что приводимый в ней материал послужит основой для понимания различных методов анализа цепей. Основное внимание в книге обращено на геометрические представления, а не на аналитические выражения, т. е. при рассмотрении явлений используются графики колебаний, а не их математические формулы. Сделана попытка классифицировать различные типы колебаний и характеристики цепей, чтобы выявить механизм переходных процессов. В начале рассмотрено поведение схем в стационарном режиме под воздействием синусоидальной э. д. с., чтобы перейти затем к неустановившимся процессам, пользуясь знакомыми инженерам методами.

До перехода к основной теме данной книги изложены основные положения, определяющие характер процессов в схеме под воздействием приложенной э. д. с., чтобы ввести некоторые понятия и определения. Возможно, что содержание вводной главы достаточно хорошо знакомо читателю, но она включена в книгу с целью дать краткий обзор основных принципов.

2. Основные законы электрических цепей

Несмотря на кажущуюся сложность методов анализа переходных процессов, все они, в конечном счете основаны на том, что токи и напряжения в линейной цепи могут быть представлены линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Определение „линейной цепи“ дано ниже. Предполагается, что читатель в известной мере знаком с этими уравнениями, и поэтому в настоящей главе дан лишь краткий обзор некоторых физических явлений, описываемых подобными уравнениями.

Дифференциальные уравнения составляются на основе законов, которым подчиняются напряжения на элементах электрической цепи — индуктивности, емкости и сопротивления (L , C и R) и токи, протекающие по ним. Первые два элемента могут только запасать магнитную и электрическую энергию, а последний — только рассеивать энергию в форме тепла. Законы для соответствующих напряжений u и токов i имеют вид*

$$u = L \frac{di}{dt}; \quad i = C \frac{du}{dt}; \quad u = R \cdot i, \quad (1)$$

независимо от формы u или i .

Эти выражения могут быть также записаны как

$$i = \frac{1}{L} \int u dt; \quad u = \frac{1}{C} \int i dt; \quad i = \frac{1}{R} u. \quad (2)$$

Под линейной цепью понимается такая цепь, элементы L , C и R которой постоянны и не зависят от протекающих по ним токов и приложенных к ним напряжений. Это значит, что геометрическая форма кривой тока, протекающего в линейной цепи, не зависит от величины напряжения, вызвавшего его, а определяется только формой этого напряжения. В этой книге рассматриваются только процессы в линейных цепях.

Пользуясь законами Кирхгофа**, можно складывать напряжения, действующие в любом замкнутом контуре (в замкнутой электрической цепи), или токи, притекающие к точке разветвления и утекающие от нее, и приравнивать их нулю

* Предполагается, как обычно, что элементы цепи L , C и R постоянны во времени.

** Законы Кирхгофа:

1. Алгебраическая сумма токов в точке разветвления равна нулю.
2. Алгебраическая сумма э. д. с. и падений напряжений в замкнутом контуре электрической цепи равна нулю.

при составлении дифференциальных уравнений для контуров и узлов. Сказанное поясняется на рис. 1. На рис. 1,а генератор электродвижущей силы $e(t)$ создает ток в цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов R , L и C . На рис. 1,б генератор тока $i(t)$ создает напряжение $u(t)$ на зажимах AB цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов R , L и C .

Для замкнутого контура (рис. 1,а) можно написать

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt - e = 0, \quad (3)$$

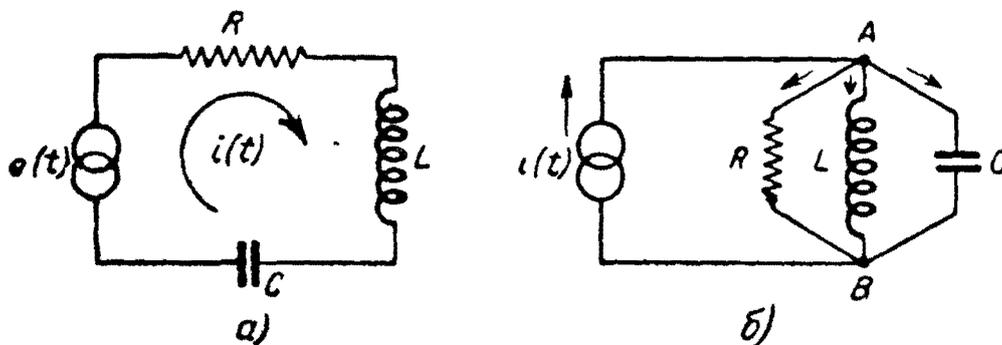


Рис. 1. Последовательный (а) и параллельный (б) колебательные контуры.

[символ (t) для простоты опущен, но подразумевается, что i и e являются функциями времени].

Аналогично, для точки A или B (рис. 1,б)

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} u + \frac{1}{L} \int u dt - i = 0. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) определяют соотношения между e и i и u и i для двух элементарных цепей. Такие цепи можно рассматривать как участки более сложных цепей, для которых потребуется составить большее число дифференциальных уравнений, чтобы определить токи и напряжения. Для примера на рис. 2 представлена двухконтурная цепь. Чтобы определить ток или напряжение на любом участке цепи при заданной электродвижущей силе $e(t)$, можно составить два дифференциальных уравнения для двух контуров, в которых текут токи i_1 и i_2 , как показано на схеме:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{d}{dt} (i_1 - i_2) + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - e = 0, \quad (5)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{d}{dt} (i_2 - i_1) + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = 0. \quad (6)$$

В уравнение (6) для второго контура не входит электродвижущая сила генератора, а роль ее выполняет напряжение на индуктивности L_3 , равное $L_3 \frac{d}{dt} (i_2 - i_1)$.

Элемент цепи (L_3), общий для обоих контуров, называется сопротивлением связи.

Можно было бы составить и третье уравнение для третьего замкнутого контура, по которому протекает ток, показанный на рис. 2 пунктирной стрелкой, но в этом нет необходимости, так как этот ток выражается через i_1 и i_2 . Такой контур

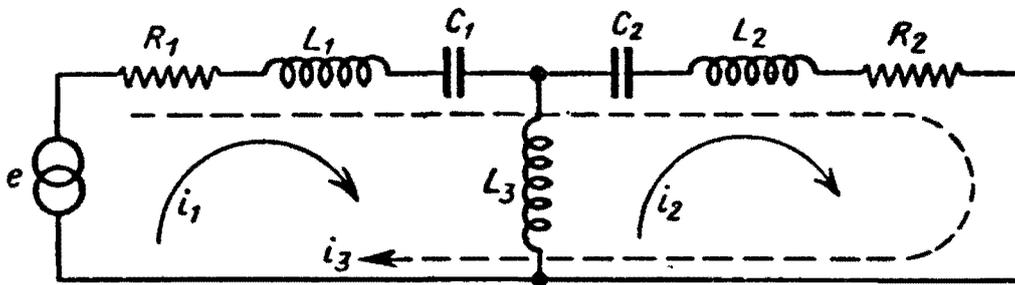


Рис. 2. Двухконтурная цепь. Пунктирной линией показан ток в дополнительном контуре.

называется дополнительным. Наименьшее число контуров, необходимое для определения токов в каждом элементе схемы, называется числом независимых контуров.

Каждый контур в любой линейной цепи может состоять из любого числа индуктивностей, емкостей и сопротивлений и уравнения (5) и (6) будут справедливы для них в общем виде, т. е. в том смысле, что сумма падений напряжений на индуктивностях, емкостях и сопротивлениях в любой момент времени будет равна сумме э. д. с., действующих в контуре. Решение уравнений общего типа дает представление о форме напряжений и токов в цепи, т. е. о переходных процессах.

Сначала следует рассмотреть простейшее уравнение, описывающее процессы в контуре рис. 1,а

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = e. \quad [(3)]$$

В этой главе часто говорится об энергии, запасенной в L и C контура, поэтому представляет интерес переписать уравнение (3) так, чтобы в него входила энергия. Умножение обеих частей уравнения на i дает

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = ei, \quad (7)$$

где $q = \int_0^t idt$ — мгновенное значение заряда конденсатора.

В правой части этого уравнения стоит выражение для мощности или скорости поступления энергии в контур от внешнего источника, а в левой части — скорость преобразования энергии источника в сопротивлении R в тепловую энергию и скорости обмена энергией между индуктивностью и емкостью. Энергия в этих элементах определяется в любой момент времени током i в индуктивности и зарядом q конденсатора.

Если один из элементов L или C отсутствует в контуре (например, емкость C в контуре, рис. 3,а), то уравнение будет содержать меньшее число членов

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e. \quad (8a)$$

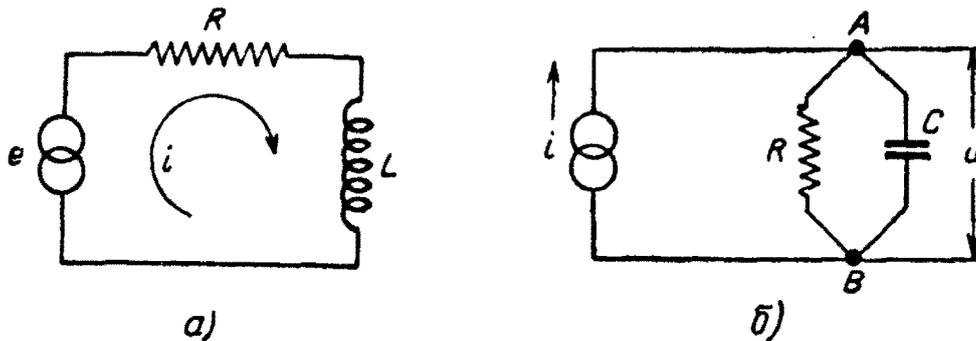


Рис. 3. Простые цепи с одним накапливающим энергию элементом.

Аналогично, если в цепи, представленной на рис. 1,б, будет отсутствовать индуктивность L (рис. 3,б), то уравнение (4), описывающее процессы в этой цепи, примет вид

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} u = i. \quad (8б)$$

Эти уравнения можно рассматривать как частные случаи уравнений (3) или (4).

Между уравнениями (3) и (8а) или (4) и (8б) существует важное соотношение, которое, как будет показано позднее (§ 33), приводит к выводу полезной теоремы об эквивалентности фильтра нижних частот и полосового фильтра.

Уравнения (3) и (8а) определяют ток, протекающий в одиночном замкнутом контуре под действием приложенной э. д. с. Принято говорить, что цепи такого вида обладают одной степенью свободы, так как в них может протекать только один ток.

В цепи, состоящей из N независимых контуров, все контурные токи могут быть представлены системой из N дифференциальных уравнений. Такая цепь имеет N степеней свободы, так как под действием приложенной э. д. с. в ней текут N независимых токов. Термин „независимый“ означает, что данный контурный ток не может быть выражен через другой. Каждый из независимых контуров может содержать или оба элемента, накапливающих энергию, и в этом случае должно применяться уравнение типа (3), или только один из этих элементов, т. е. L или C , и контурный ток будет определяться уравнением типа (8б). Как будет показано ниже, это не изменяет числа степеней свободы, но влияет на форму тока.

Прежде чем переходить к выяснению физического смысла этих уравнений, целесообразно обратить внимание на сходство уравнений (3) и (4), выражающих соотношение токов и напряжений для простых цепей (рис. 1,а и б). Из сравнения этих уравнений видно, что члены их одинаковы, с той только разницей, что L в одном уравнении заменено на C в другом R — на $\frac{1}{R}$ и э. д. с. генератора e — на ток i , даваемый генератором. Рассматривая эти уравнения с чисто математической точки зрения, можно ожидать, что они будут иметь одинаковые решения, только одно из них определит ток в контуре, а другое — напряжение на зажимах цепи.

Цепи, подобные изображенным на рис. 1 и обладающие такой аналогией, мы назовем „цепями-двойниками“. Уравнения, описывающие процессы в них, сходны в том смысле, что решения их имеют одинаковую математическую форму. Можно показать, что почти любая цепь имеет двойник, независимо от числа входящих в нее контуров.

Процессы в многоконтурных цепях-двойниках будут описываться системой соответствующих дифференциальных уравнений. Аналогию элементарных цепей (рис. 1,а и б) можно установить, исходя из природы и положения соответствующих элементов, входящих в уравнения: так, конденсатор, соединенный последовательно с генератором, соответствует индуктивности, соединенной параллельно с генератором, и т. д. Это весьма важное положение позволяет все вычисления переходных процессов, сделанные для одной цепи, применить к другой. Например, если известна форма кривой э. д. с. $e(t)$ генератора (рис. 1,а), то можно вычислить соответствующую форму кривой тока $i(t)$ по уравнению (3). Но те же выражения будут справедливы для тока $i(t)$ и на-

пряжения $u(t)$ в цепи рис. 1,б. Для обеих цепей требуется решить только одно уравнение. В дальнейшем (§ 28 главы III) будут рассмотрены некоторые примеры из практики, иллюстрирующие применение этого принципа и позволяющие вывести правила образования таких цепей, а также будет показано, в каких случаях нельзя образовать цепь-двойник.

Интересно отметить, что применение определенных механических аналогий к некоторым электрическим цепям возможно только потому, что дифференциальные уравнения для некоторых механических систем аналогичны уравнениям для электрических цепей.

Сравнительно сложные механические системы можно рассматривать, пользуясь методом, аналогичным делению электрической цепи на независимые контуры и составляя для них систему дифференциальных уравнений основных типов. Явления в механических системах, в частности, колебания струны, тщательно изучались на заре развития техники связи и результаты применялись к электрическим системам на основе аналогии уравнений.

3. Физический смысл решения уравнений электрической цепи

В этом параграфе выясняется физический смысл, заключающийся в решении основных уравнений (3 или 8,а) для электрического контура. Читатель, вероятно, уже знаком с математическими правилами решения таких уравнений, но мы будем в меньшей мере пользоваться чистыми аналитическими методами, а чаще геометрическими представлениями.

В цепи, представленной на рис. 1,а, действует генератор, создающий э. д. с., форма которой выражается функцией $e(t)$. Требуется определить ток в контуре, возникающий под действием этой э. д. с., как функцию времени, т. е. его форму. Зависимость между током и приложенной э. д. с., конечно, дана в уравнении (3), но мы не можем по его внешнему виду установить кривую формы тока, так как трудно наглядно представить себе дифференциалы и интегралы. Выражаясь математическим языком, можно сказать, что ток в этом уравнении является неявной функцией, т. е. форма его содержится в уравнении, но не выражена в виде, доступном для непосредственного понимания, тогда как из опыта известно, что ток и напряжение в электрической цепи являются явными функциями времени, т. е. они имеют определенную величину в любой момент времени. Из физических представлений известно, что кривая тока должна иметь

конечную амплитуду, быть однозначной (т. е. ток не может иметь одновременно два значения) и непрерывной, если подходить практически и не допускать возможности возникновения бесконечно больших э. д. с. Эти три условия должны быть также справедливы и для напряжений, возникающих на индуктивности, сопротивлении и емкости, представленных соответствующими членами в уравнении (3). Позднее будет показано, что теоретически приложенная к цепи э. д. с. (или ток) может быть и разрывной, так как она может создаваться путем какого-либо переключения генератора. Но практически вызываемое такой э. д. с. или током действие должно подчиняться этим условиям, поскольку каждая физическая цепь содержит определенную конечную индуктивность и емкость, хотя они могут быть и не показаны в схеме.

Эти рассуждения приводятся здесь для того, чтобы попытаться выяснить, какой общий тип или класс математических функций должен быть использован для выражения формы кривой тока и показать физические ограничения такого выражения.

Если найдено решение, удовлетворяющее физическим условиям, то в дальнейшем можно чисто аналитически исследовать вопрос о том, какие явления может вызвать та или иная идеализация — например, действие прерывистых токов и напряжений при отсутствии остаточных индуктивностей или емкостей в цепи.

Возвращаясь к уравнению (3), можно предположить, что функция, выражающая форму кривой тока, может быть представлена вне зависимости от него в виде некоторой функции, так как известно, что приложенная э. д. с. и ток имеют конечное значение в любой момент времени. Таким образом, уравнение (3) можно представить в следующем виде

$$i \cdot z = e, \quad (9)$$

где i — ток, являющийся определенной функцией времени;
 z — функция, зависящая от параметров контура;
 e — приложенная э. д. с., также являющаяся функцией времени.

Второй член в левой части назван функцией, зависящей от параметров контура, так как ясно, что он определяет соотношение между током и э. д. с. и, следовательно, должен зависеть от элементов, включенных в цепь. Никаких других условий пока не высказывается.

Чтобы уравнение (3) приняло форму уравнения (9), ток должен быть представлен такой функцией, дифференциал и интеграл которой пропорциональны или равны самой функ-

ции. Единственной функцией, для которой это условие выполняется, является показательная функция, так что

$$i = I \cdot e^{mt}, \quad (10)$$

где m — постоянная, не зависящая от времени.

Эта функция уже позволяет отчетливо представить себе также дифференциал и интеграл функции тока, так как они идентичны самой функции тока. Сумма падений напряжения, входящая в уравнение (3), теперь выразится как

$$Ie^{mt} (mL + R + 1/mC) = e, \quad (11)$$

и следовательно, функция, зависящая от элементов контура, равна

$$(mL + R + 1/mC).$$

Читатель может видеть, что эта функция является характеристикой элементов контура и их расположения, т. е. можно сказать, что она определяет контур. Эта функция, очевидно, равна отношению приложенной э. д. с. к вызванному ей току, т. е. e/i .

Наше утверждение, что ток i должен выражаться показательной функцией, приводит к значению, что э. д. с. должна также изменяться как показательная функция, так как функция $mL + R + 1/mC$, характеризующая контур, постоянна. Уравнение (11) было бы совершенно правильно, если бы приложенная э. д. с. выражалась как

$$e = E \cdot e^{mt}, \quad (12)$$

где

$$E = I(mL + R + 1/mC).$$

Утверждение, сделанное относительно уравнения (9), применимо также к линейной сумме любого числа показательных функций, так что токи могут быть представлены как сумма элементарных токов, выражающихся показательными функциями, т. е.

$$i = I_1 e^{m_1 t} + I_2 e^{m_2 t} + I_3 e^{m_3 t} \dots \text{ и т. д.}, \quad (13)$$

где $m_1, m_2, m_3 \dots$ попережнему являются постоянными.

Любой ток, протекающий в физической цепи, должен таким образом допускать разложение в ряд, состоящий из сумм экспоненциальных составляющих тока. Отсюда следует, что э. д. с., создающую этот ток, можно рассматривать как

сумму экспоненциальных составляющих напряжения. Подстановка i в уравнение (3) из (13) дает

$$I_1 e^{m_1 t} (m_1 L + R + 1/m_1 C) + I_2 e^{m_2 t} (m_2 L + R + 1/m_2 C) + \dots = e. \quad (14)$$

Это значение о разложении напряжения и тока на составляющие дает основание для определенного метода анализа переходных процессов и решения задачи об искажении формы колебаний при прохождении их через электрический фильтр и другие элементы; задача эта очень часто возникает в технике связи. Один из наиболее важных методов анализа основан на применении мнимого значения m в показательной функции. Положив $m = j\omega$, где $\omega = \text{const}$ и $j^2 = -1$, можно выразить составляющие тока через тригонометрические функции

$$i = I \cdot e^{j\omega t}$$

или

$$i = I (\cos \omega t + j \sin \omega t). \quad (15)$$

Математические трудности, связанные с появлением символа j в этом выражении, определяющем синусоидальные колебания, мы рассмотрим в следующей главе. Тем не менее можно отметить, что сказанное об экспоненциальной форме тока можно применить к действительной части ее следующим образом

$$i = \text{Re} (I e^{j\omega t}) = I \cos \omega t. \quad (16)$$

Это означает, что изменяющийся по косинусоидальному закону ток является одной из возможных элементарных составляющих тока сложной формы.

Никаких ограничений относительно числа составляющих тока или напряжения, требующихся для более полного представления их физической формы, мы не сделали и практически может потребоваться бесконечно большое число таких составляющих. Другое важное обстоятельство возникает в связи с формой составляющих тока, так как значения переменной t должны быть непрерывны в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и показательная функция должна существовать для всех этих значений. Нельзя смешивать непрерывно действующую э. д. с. с э. д. с., изменяющейся по экспоненциальному закону, приложенной к цепи в момент $t = 0$ и имеющей нулевую амплитуду до $t = 0$ (рис. 4, б и в). Имеется большое различие в воздействии на цепь такой внезапно приложенной э. д. с., в форме которой имеются разрывы, и э. д. с. непрерывной

формы, рассматривающейся до сих пор и определяемой одинаковым математическим выражением для всех значений времени t от $-\infty$ до $+\infty$. В последнем случае поведение цепи определяется для всего времени, а в первом случае — только с момента $t=0$, и математический процесс определения вызванного ею тока основан на знании формы э. д. с. после $t=0$, тогда как применяемые математические условия предполагают, что учитывается предыдущее состояние цепи.

Так, например, если в индуктивности или емкости была запасена некоторая энергия до $t=0$, то следует ожидать, что эта энергия изменит форму результирующего тока, так как она может вызвать ток в цепи независимо от того, будет

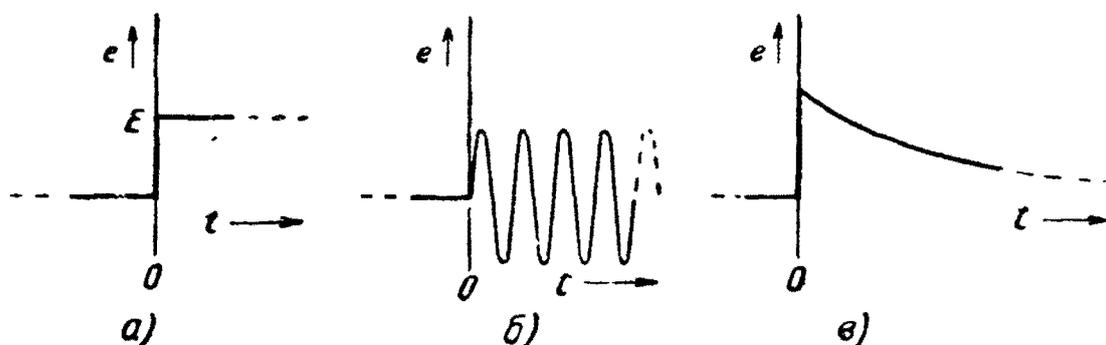


Рис. 4. Э. д. с., возникающие в момент $t=0$ и длящиеся бесконечно долго:

а) скачок напряжения; б) синусоидальное колебание; в) напряжение, спадающее по экспоненте.

ли приложена э. д. с. в момент $t=0$ или нет. Если же приложенная э. д. с. непрерывна и определена для всех значений времени, то не может быть никаких сомнений относительно запасенной энергии, и, разложив эту э. д. с. на синусоидальные составляющие, можно вычислить результирующий ток. Метод разложения кривых на составляющие рассмотрен во второй главе. Синусоидальная кривая является не единственной простой формой составляющих э. д. с. и тока, но она очень удобна и широко применяется. Метод Фурье, используемый для анализа цепей (состоящий в разложении сложных кривых на такие простые составляющие), хотя и имеет математические ограничения, но очень полезен для изучения переходных процессов и искажений в линейных цепях. Этот метод положен в основу рассмотрения вопросов, составляющих содержание данной книги.

4. Собственные и вынужденные колебания в цепи

При расчете цепи возникает много вопросов, связанных с воздействием на цепь э. д. с., имеющей нулевую амплитуду до определенного времени $t=0$, и конечную амплитуду после этого времени. Типичные примеры таких э. д. с. показаны на рис. 4. Здесь представлены:

а) скачкообразная э. д. с. (толчок или скачок напряжения), которая может быть определена как

$$\left. \begin{aligned} e &= 0 \text{ при } t < 0 \\ e &= E \text{ при } t \geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Если $E=1$, такая функция называется „единичной функцией Хивисайда“ или „единичным скачком“ и обозначается символом H или I ;

б) синусоидальные колебания, модулированные скачкообразным напряжением

$$\left. \begin{aligned} e &= 0 \text{ при } t < 0 \\ e &= E \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ при } t \geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Эти колебания иногда называются „внезапно приложенными синусоидальными колебаниями“, так как их можно рассматривать как синусоидальные колебания, модулированные по амплитуде скачкообразным напряжением, представленным уравнениями (17);

в) скачкообразная э. д. с. с экспоненциально убывающей амплитудой

$$\left. \begin{aligned} e &= 0 \text{ при } t < 0 \\ e &= Ee^{-mt} \text{ при } t \geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь процессы, возникающие в цепи (рис. 1, а), когда э. д. с. генератора изменяется по описанному закону, т. е. равна нулю до определенного момента времени и имеет определенное значение после этого момента. Разумно предположить, что если до рассматриваемого момента в цепи не действовали никакие э. д. с. и токи, то при подключении в момент $t=0$ э. д. с. e , форма тока должна быть такой же, как форма э. д. с. Поскольку цепь была определена как линейная, форма результирующего тока должна быть независимой от амплитуды приложенной э. д. с. Форма тока для этой цепи будет определяться уравнением (3), но так как э. д. с. определена только для $t \geq 0$, следует считать, что решение применимо только для $t \geq 0$.

Предположим, что э. д. с. имеет форму, показанную на рис. 4,б. Тогда ток определяется уравнением

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (20a)$$

(Только для $t \geq 0$).

Это уравнение можно решить по методу, рассмотренному в § 3, сделав допущение, что э. д. с. действует в течение всего времени, а не только при $t \geq 0$ и представить ток i с помощью показательной функции. Такое решение определит форму тока, которая была бы в том случае, если бы э. д. с. была непрерывной косинусоидальной функцией времени

$$E \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Если теперь отбросить часть кривой тока, лежащую влево от $t=0$, то оставшаяся часть не будет соответствовать току, вызываемому внезапно приложенной э. д. с. в момент $t=0$ (рис. 4,б), так как в этот момент происходит разрыв кривой э. д. с.

Отсюда следует, что для нахождения кривой тока в тех случаях, когда кривая э. д. с. имеет разрыв непрерывности при $t=0$, необходимо найти два решения дифференциального уравнения. Первое решение можно найти, предположив, что кривая э. д. с. непрерывна для всех значений t и отбросив затем в решении ту часть, которая соответствует $t < 0$.

Второе решение должно каким-то образом определить кривую тока, обусловленного нарушением непрерывности э. д. с. при $t=0$, и учитывать процессы, происходящие в цепи до этого момента.

Эти два решения дадут, согласно принципа наложения (суперпозиции), полную кривую тока, возникающего в цепи под действием внезапно приложенной э. д. с. в момент $t=0$.

Первое решение соответствует установившемуся режиму а второе — переходным процессам в цепи.

Обратим теперь внимание на второй случай, так как установившееся состояние в цепи было уже рассмотрено выше.

5. Собственные колебания замкнутого контура

В этом параграфе рассматривается действие приложенной к цепи э. д. с., которая определена только для $t \geq 0$. При этом не делается никаких допущений, исключающих наличие в цепи энергии, запасенной до $t=0$, которая совершенно не учитывается уравнением (20).

Э. д. с. может быть приложена к цепи в момент $t=0$, например, путем размыкания рубильника S (рис. 5,а). Если рубильник размыкается в момент $t=0$, то цепь становится идентичной с представленной на рис. 1,а*, но ток в ней может иметь другую величину, вследствие наличия начального тока I_0 и начального заряда конденсатора q_0 , значения которых при $t=0$ известны. Энергии, связанные с I_0 и q_0 различны и независимы друг от друга. Первый создает энергию магнитного поля катушки, а второй — энергию электростатического поля конденсатора, которые соответственно равны $\frac{1}{2} L I_0^2$ и $\frac{q_0^2}{2C}$ и могут быть определены отдельно.

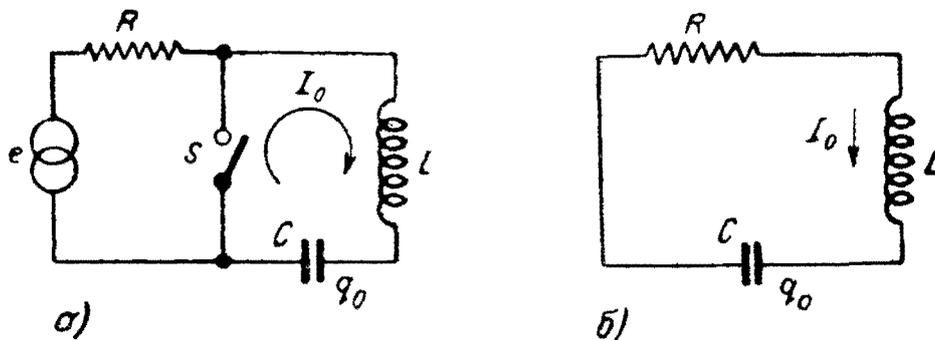


Рис. 5. Цепь с выключателем, размыкаемым в момент $t=0$

Предположим теперь, что эти энергии существовали в цепи рис. 5,б в момент $t=0$. Если эти энергии „освободить“ в этот момент, то в цепи потечет ток определенной величины и форма его будет зависеть только от конфигурации цепи или расположения ее элементов. Величина тока будет, конечно, зависеть от значений I_0 и q_0 , а форма тока не зависит от них, поскольку цепь линейна.

Сумма мгновенных значений напряжений в замкнутом контуре выражается уравнением

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0, \quad (206)$$

которое отличается от уравнения (3) только тем, что приложенная э. д. с. равна нулю. I_0 и q_0 не входят в это уравнение, определяющее форму тока i , но они будут использованы вскоре для определения величины тока.

В рассматриваемой цепи имеются два реактивных элемента, в которых может накапливаться энергия, но мы можем

* Все последующие выводы, для цепи рис. 1,а, могут быть применимы и к цепи рис 1,б, так как это цепи — двойники.

перейти к более простой цепи, содержащей только один из этих элементов — емкость или индуктивность. Примером может служить цепь, показанная на рис. 3,а (без генератора). В цепи не может быть более двух реактивных элементов, так как несколько отдельных индуктивностей или емкостей могут быть заменены одной эквивалентной индуктивностью или емкостью.

Если контур содержит индуктивность и емкость, то можно рассмотреть такой случай, когда при $t=0$ энергия запасена только в одном из этих элементов, а не в обоих. Если эта энергия освобождается в момент $t=0$, то в цепи потечет ток, независимо от того, в каком элементе была сосредоточена энергия.

Поэтому можно предположить, что форма тока будет зависеть только от относительных значений L , C и R . Если при $t=0$ энергия будет сосредоточена и в индуктивности и в емкости, то каждый из этих источников энергии даст свою составляющую тока, форма которой также зависит от L , C и R . Таким образом, можно ожидать, что результирующий ток будет иметь две составляющих одинаковой формы с амплитудами, зависящими от количества запасенной энергии в индуктивности и емкости. Форма результирующего тока определяется решением уравнения (20б) и на основании рассуждений, приведенных в предыдущем разделе, это решение можно представить в виде линейной суммы экспоненциальных составляющих

$$i = I_1 e^{m_1 t} + I_2 e^{m_2 t}, \quad (21)$$

где I_1 и I_2 — постоянные интегрирования, которые могут быть выражены, в конечном счете, через I_0 и q_0 .

Так как эти составляющие тока протекают в контуре свободно, без воздействия внешней э. д. с., то полный ток часто называют свободным током или током собственных колебаний, а i — решением дифференциального уравнения свободных или собственных колебаний. Знание обеих составляющих тока имеет важное значение, так как они характеризуют поведение цепи. Их можно назвать „нормальными“ видами колебаний данной цепи.

Как уже отмечалось, число степеней свободы сложной цепи равно числу независимых контуров, в которых могут протекать независимые токи. Каждый из таких независимых контуров может содержать один или два элемента, накапливающих энергию (индуктивность или емкость), и, следовательно, иметь один или два нормальных вида колебаний.

Таким образом определяется число нормальных видов колебаний в сложной цепи.

Оговоримся, что хотя мы применили термин „нормальные виды колебаний“, но характер изменения тока не обязательно будет колебательным, т. е. направление тока не обязательно будет изменяться периодически.

Для определения действительной формы тока собственных колебаний в конкретной цепи, необходимо решить уравнение (20б). Мы не будем повторять здесь выводов о том, что это решение должно иметь экспоненциальную форму, но на основании рассуждений, приведенных в § 3, можем сказать, что показательная форма тока позволяет написать уравнение (20б) в виде

$$i(mL + R + 1/mC) = 0 \quad (22)$$

сходным с уравнением (11), с той лишь разницей, что э. д. с. здесь равна нулю.

Одно решение можно получить, положив $i = 0$, но это означает только, что в цепи нет колебаний.

Следовательно, нужно положить

$$mL + R + 1/mC = 0. \quad (23)$$

Это — квадратное характеристическое уравнение, для которого можно написать

$$(m - m_1)(m - m_2) = 0, \quad (24)$$

где

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right| = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad (25)$$

дает два значения m , определяющих форму тока, выраженного уравнением (21).

Таким образом, решение дифференциального уравнения второго порядка (20б) дает математическое обоснование физическим представлениям о двух составляющих тока или „нормальных видах колебаний“ у цепи, содержащей L и C .

Подстановка m_1 и m_2 из (25) в (21) дает формы токов, соответствующих двум нормальным видам колебаний

$$i = I_1 e^{\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + I_2 e^{\left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}, \quad (26)$$

где i — суммарный ток свободных колебаний в цепи.

Необходимо помнить, что это решение справедливо только для $t \geq 0$, так как ток определен из условий, что в момент $t = 0$ ток в индуктивности $i = I_0$ и заряд конденсатора $q = q_0$, а состояние в цепи до этого времени не учитывалось. Поэтому ничего нельзя сказать о форме тока в цепи до $t = 0$.

Амплитуды составляющих тока в уравнении (26) могут быть найдены из начальных условий. Подстановка начального значения тока в (26) дает

$$I_1 + I_2 = I_0. \quad (27)$$

Однако, q_0 нельзя подставить непосредственно в уравнение (26), так как заряд q конденсатора нельзя получить интегрированием этого уравнения, не применимого для $t < 0$. Но значение q для каждого момента времени, включая и $t = 0$, должно содержаться в исходном дифференциальном уравнении (20б) и, конечно, входит в член $\int idt$, который равен q_0 при $t = 0$.

Определяя i и di/dt для $t = 0$ из (26) и подставляя их в (20б), получим

$$L(m_1 I_1 + m_2 I_2) + R(I_1 + I_2) + q_0/C = 0, \quad (28)$$

применяя снова для краткости записи обозначения m_1 и m_2 (из уравнения 25).

Начальные амплитуды I_1 и I_2 определяются из полученных двух уравнений (27) и (28) как

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= - \frac{I_0(m_2 L + R) + q_0/C}{(m_1 - m_2)L}, \\ I_2 &= + \frac{I_0(m_1 L + R) + q_0/C}{(m_1 - m_2)L}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Таким образом, полностью определена форма тока свободных колебаний, возникающих в цепи, содержащей L и C , под действием энергии, запасенной в цепи к определенному моменту времени $t = 0$.

Нет необходимости рассматривать в этой вводной главе различные варианты начальных условий, например, когда I_0 или q_0 равны нулю, или в цепи отсутствует один из элементов, так как процесс определения тока в принципе остается тем же.

Если в цепи имеются два типа элементов, накапливающих энергию, то уравнение будет второго порядка; будут иметь место два нормальных вида колебаний, и для определения их амплитуд нужно найти две постоянные интегрирования, исходя из запаса энергии в L и C в момент $t = 0$.

Аналогично, если в цепи имеется только индуктивность или емкость (рис. 7), тогда будет только один вид нормальных колебаний, и должна быть найдена одна постоянная интегрирования или амплитуда колебаний, определяемая запасом энергии в соответствующем элементе цепи.

Читатель может легко доказать самостоятельно, что ток собственных колебаний, возникающих в простых цепях, представленных на рис. 7,а и б, под действием энергии, запасенной в индуктивности или емкости к моменту $t=0$, выразится соответственно как

$$\begin{aligned} \text{а) } i &= I_L e^{-\frac{R}{L}t}, \\ \text{б) } i &= I_C e^{-\frac{1}{RC}t}. \end{aligned} \quad (30)$$

Амплитуды I_L и I_C , являющиеся в данном случае постоянными интегрирования, могут быть определены через I_0 или q_0 точно так же, как для рассмотренного случая цепи, содержащей и индуктивность, и емкость.

Определив аналитическое выражение для тока собственных колебаний и двух его составляющих, соответствующих нормальным видам колебаний (для цепи, содержащей индуктивность и емкость) или одному виду нормальных колебаний (для цепи, содержащей только индуктивность или емкость), перейдем к краткому рассмотрению формы этих токов.

Рассматривая уравнение (21), мы пришли к выводу, что формы обеих составляющих тока, соответствующих нормальным видам колебаний, должны быть одинаковыми. Допустив, что это уравнение правильно, мы нашли выражения для этих токов, данные в уравнении (26). Показатели степени для „e“ в этом уравнении состоят из одинаковых членов и отличаются только знаком перед корнем. Чтобы выяснить значение этого, необходимо рассмотреть три отдельных случая.

Цепь, в которой $R > 2\sqrt{L/C}$

Форма тока, вызываемого внезапным освобождением запасенной в цепи энергии, будет зависеть от способности цепи превращать эту энергию в тепловую. Если, например, конденсатор заряжен и энергия его освобождается в момент $t=0$, в цепи потечет ток, который будет переносить энергию в катушку с определенной скоростью. Но при этом часть энергии будет теряться в активном сопротивлении

цепи. Если это сопротивление относительно велико, то большая часть энергии будет поглощаться им, переход энергии быстро прекратится, и ток упадет до нуля. Из уравнения (26) видно, что при $R > 2\sqrt{L/C}$ формы токов обоих видов нормальных колебаний выражаются действительными показательными функциями, и суммарный ток будет изменяться монотонно, т. е. направление его в цепи не будет меняться.

Для упрощения обозначим в уравнении (26)

$$\frac{R}{2L} = \delta \quad \text{и} \quad \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = \beta^2. \quad (31)$$

Назовем $1/\delta$ — постоянной времени*, а β — угловой частотой затухающих колебаний по соображениям, которые будут приведены при рассмотрении случая (б). В данном случае β^2 положительно и выражение для тока [из уравнения (26)] приобретает вид

$$i = I_1 e^{-(\delta-\beta)t} + I_2 e^{-(\delta+\beta)t} \quad \left. \vphantom{i} \right\} \quad (32)$$

и

$$m_1 = -(\delta - \beta); \quad m_2 = -(\delta + \beta).$$

Для рассматриваемого случая, когда $R > 2\sqrt{L/C}$, показатели степени $(\delta - \beta)$ и $(\delta + \beta)$ должны быть положительными, так как согласно уравнению (31) $\delta > \beta$. Отсюда следует, что составляющие тока будут убывать по экспоненциальному закону с разной степенью затухания. На рис. 6 представлен общий характер их изменения. В момент $t=0$ они имеют амплитудное значение I_1 и I_2 и затем убывают, асимптотически приближаясь к нулю. Результирующий ток i , показанный на рис. 6 пунктирной линией, является суммой двух токов, соответствующих нормальным видам колебаний, и может быть представлен в виде одного члена путем подстановки значений I_1 и I_2 из уравнения (29) в уравнение (32)

$$i = - \left[\frac{I_0(-\delta - \beta)L + I_0R + q_0/C}{2\beta L} \right] e^{-(\delta-\beta)t} +$$

$$+ \left[\frac{I_0(-\delta + \beta)L + I_0R + q_0/C}{2\beta L} \right] e^{-(\delta+\beta)t}.$$

* Величина δ называется „коэффициентом затухания“, следовательно, постоянная времени является обратной величиной коэффициента затухания.

Это выражение может быть упрощено и тогда приобретает вид

$$i = \left[I_0 \cdot \operatorname{ch} \beta t - \left(I_0 \frac{\delta}{\beta} + \frac{q_0}{\beta LC} \right) \cdot \operatorname{sh} \beta t \right] e^{-\delta t}, \quad (33)$$

где

$$\operatorname{ch} \beta t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \text{ — гиперболический косинус}$$

и

$$\operatorname{sh} \beta t = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \text{ — гиперболический синус.}$$

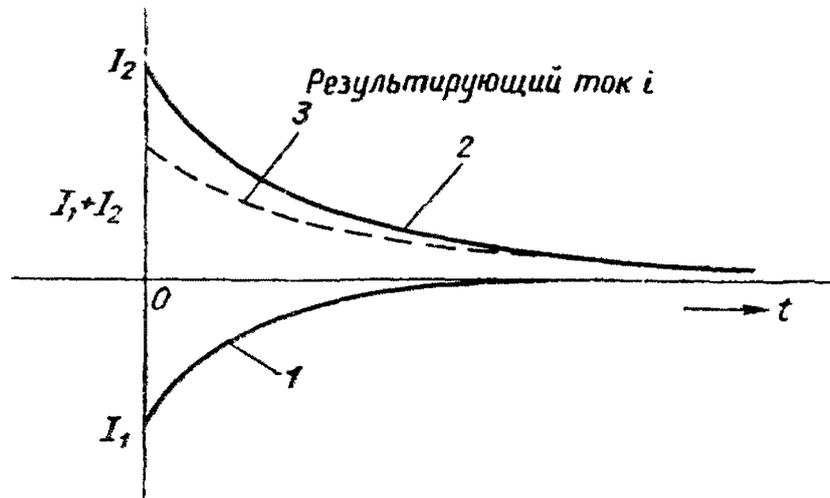


Рис. 6. „Нормальные“ составляющие и результирующий ток собственных колебаний цепи, изображенной на рис. 5,6 в случае, когда $R > 2\sqrt{L/C}$; 1 и 2 — виды колебаний.

Полученное выражение может показаться более сложным, чем (32), но в этом виде оно включает начальные условия, определяющие запас энергии в цепи к моменту $t=0$, и дает как величину, так и форму тока. Положив в этом выражении $I_0=0$, или $q_0=0$, можно определить ток для случая, когда в момент $t=0$ энергия сосредоточена только в конденсаторе или только в катушке.

Цепь, в которой $R = 2\sqrt{L/C}$

Исследование уравнения (26) показывает, что при $R = 2\sqrt{L/C}$ квадратный корень для показателя степени „e“ превращается в нуль и выражение для тока приобретает вид

$$i = I_1 e^{-\frac{R}{2L} t} + I_2 e^{-\frac{R}{2L} t}. \quad (34)$$

Это значит, что обе составляющие тока имеют одинаковую форму и изменяются по экспоненциальному закону с одинаковым затуханием.

Условие б) может быть получено в цепи, если R — переменное и его значение вначале больше $2\sqrt{L/C}$, как в случае а), а затем плавно изменяется до $R = 2\sqrt{L/C}$. Величина β в уравнении (32) становится при этом равной нулю.

Выражение для полного тока в цепи в данном случае может быть найдено из уравнения (33) при подстановке $\beta \rightarrow 0$. При этом $\text{ch } \beta t \rightarrow 1$ и $\text{sh } \beta t \rightarrow \beta t$ и

$$i = \left[I_0 - \left(I_0 \delta + \frac{q_0}{LC} \right) t \right] e^{-\delta t}. \quad (35)$$

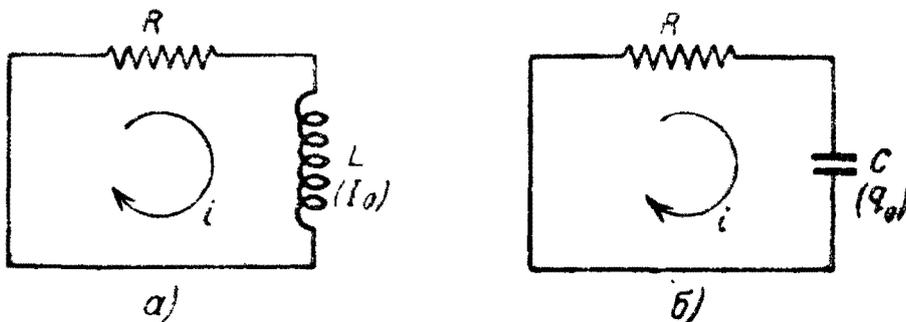


Рис. 7. Простые цепи. В момент $t = 0$ энергия запасена в цепях: а — в индуктивности, б — в емкости.

В этом предельном случае процесс в цепи еще не колебательный, ток течет только в одном направлении и вся энергия, запасенная в цепи, расходуется в сопротивлении R при переходе ее из емкости в индуктивность. Кривая тока, представленная на рис. 8, а, убывает до нуля с максимально возможной скоростью при сохранении одного и того же направления тока. Величина $R = 2\sqrt{L/C}$ называется поэтому сопротивлением критического затухания цепи.

Цепь, в которой $R < 2\sqrt{L/C}$

Если величина сопротивления R будет меньше критического значения, то запасенная в цепи энергия не расходуется сразу в этом сопротивлении, а переходит из емкости в индуктивность и обратно.

При этих переходах в сопротивлении расходуется значительная часть энергии, но можно показать, что „колебания“ энергии не прекращаются сразу, а запас ее постепенно уменьшается со скоростью, зависящей от величины сопротивления.

Такое краткое физическое объяснение является чисто иллюстративным. Для определения точной формы колебательного тока следует обратиться к общему уравнению (26) для тока в цепи (рис. 5,б) и решить его для условия

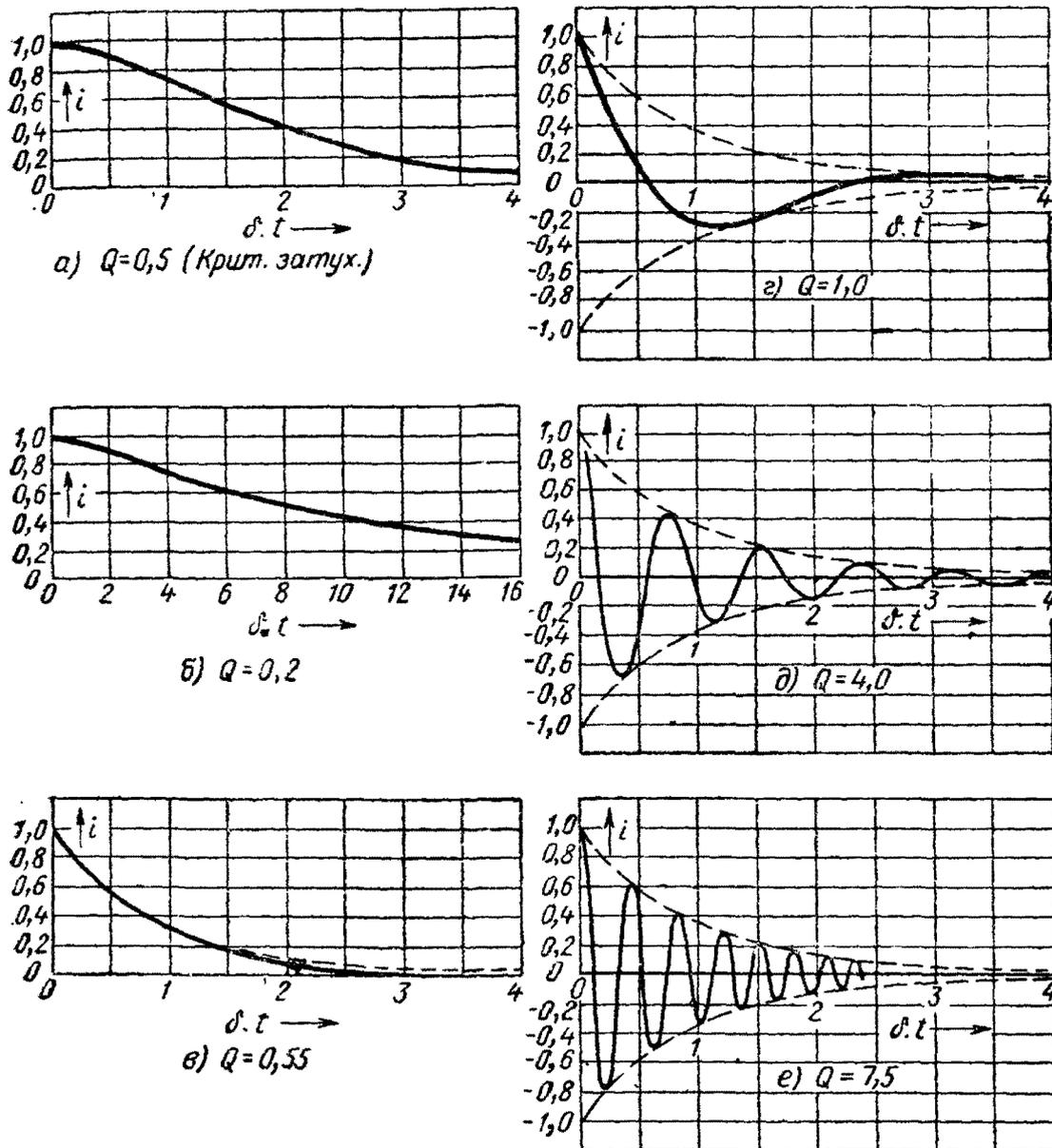


Рис. 8. Собственные колебания последовательного контура (рис. 1а) для различных значений Q .

$R < 2\sqrt{L/C}$. При этом подкоренное выражение в показателе степени $\left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}\right)$, обозначенное через β^2 , становится отрицательным и квадратный корень из него — мнимым. Уравнение (26) можно переписать в виде

$$i = I_1 e^{(-\delta + j\beta)t} + I_2 e^{(-\delta - j\beta)t} = (I_1 e^{j\beta t} + I_2 e^{-j\beta t}) e^{-\delta t} \dots, \quad (36)$$

где $j^2 = -1$, δ — имеет то же значение, что и прежде, а β — является абсолютным значением $\sqrt{\beta^2}$ с положительным знаком.

Подстановка значений начальных амплитуд I_1 и I_2 из уравнения (29) дает

$$i = \left[I_0 \cos \beta t - \left(I_0 \frac{\delta}{\beta} + \frac{q_0}{\beta LC} \right) \sin \beta t \right] e^{-\delta t}. \quad (37)$$

Уравнение определяет форму тока в цепи с затуханием ниже критического. Этот ток — колебательный в действительном значении этого слова. Его направление периодически меняется, а амплитуда убывает, как показано на рис. 9, а и б.

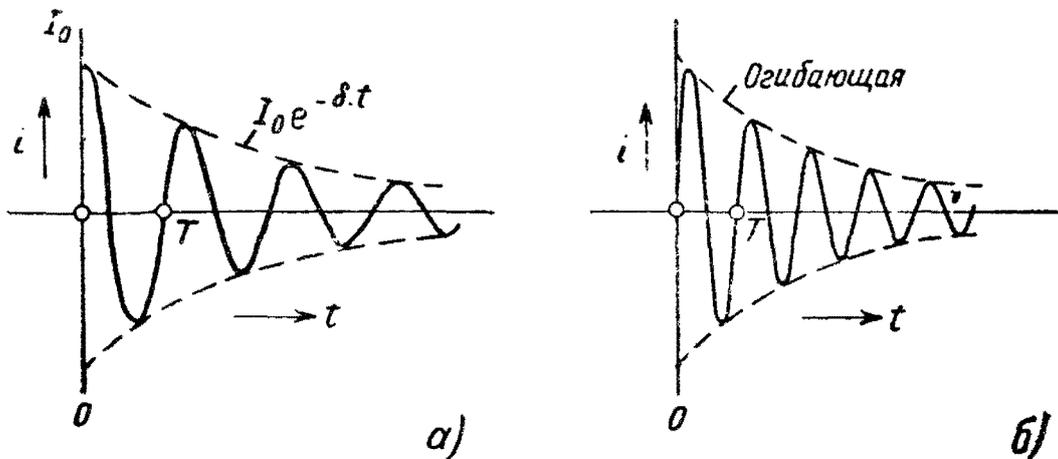


Рис. 9. Собственные колебания контура (рис. 5, б) в случае, когда $R < 2\sqrt{L/C}$ для разных начальных условий при различных соотношениях между частотой и затуханием:

а) колебания при малом β и $q_0=0$; б) колебания при большом β и $I_0=0$

Пунктирная линия на этих рисунках называется огибающей, т. е. линией, определяющей характер изменения амплитуды колебаний. Уравнение этой линии дается экспоненциальным членом в уравнении (37).

Таким образом, величина $1/\delta$, названная выше постоянной времени, определяет уменьшение амплитуды колебаний со временем. За промежуток времени $t=1/\delta$ с момента $t=0$ амплитуда уменьшается до $1/e$ от первоначального значения.

Два графика, представленные на рис. 9, а и б, характеризуют колебания, происходящие при различных условиях. Прежде всего на них показано влияние начальной запасенной энергии. Рис. 9, а соответствует случаю, когда начальный заряд конденсатора q_0 равен нулю и ток при $t=0$ имеет максимальное значение I_0 . На рис. 9, б $I_0=0$ в начальный момент и ток начинается с нулевого значения. При

различных начальных значениях тока и заряда, возможны все промежуточные значения тока i в момент $t=0$. Другое различие кривых $a)$ и $b)$ состоит в том, что число полных колебаний тока за единицу времени во втором случае больше. Время, за которое совершается одно полное колебание, зависит от постоянной величины β и называется периодом колебания. Однако, период не окажется постоянным, если его измерять по максимумам таких кривых, как представленные на рис. 9, так как их огибающая или амплитуда изменяется. Период между максимумами будет почти постоянным, если δ очень мало или спустя длительное время после начала колебаний, когда изменение амплитуды в течение двух последовательных периодов очень незначительно. В этом случае период, измеренный по максимумам, будет равен периоду, измеренному по нулевым точкам

$$t_0 = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \quad (38)$$

как это можно видеть из уравнения (37).

Окончание первого периода после $t=0$ отмечено на графиках рис. 9 точкой T . Он измерен по нулевым значениям и остается постоянным и равным t_0 для всех периодов.

В случае, представленном на рис. 9, b , за один период происходит меньшее убывание амплитуды, чем в случае рис. 9, a . Это зависит от соотношения постоянной времени $1/\delta$ и угловой частоты β . Число колебаний, при котором происходит одинаковое убывание амплитуды, возрастает с увеличением отношения β/δ . Это отношение, являющееся мерой продолжительности собственных колебаний, может быть выражено через R , L и C

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\frac{R}{2L}},$$

или

$$\frac{\beta^2}{\delta^2} = \left(\frac{2}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2 - 1. \quad (39)$$

Форма кривой собственных колебаний зависит только от этого отношения [см. уравнение (37)]. Выражение $1/R\sqrt{L/C}$ есть, таким образом, мера затухания колебаний в контуре

(рис. 5,б) и обычно обозначается символом Q^* . Чем меньше значение R , тем больше колебаний произойдет за время, в течение которого амплитуда уменьшится на определенную величину. Ясно также, что число этих колебаний будет возрастать с увеличением отношения L/C . Q является наиболее компактной и удобной формой, характеризующей способность цепи запасать и рассеивать энергию. Аналогичное выражение можно применить к цепям, содержащим только один реактивный элемент (рис. 3,а и б), в которых не может быть колебательных процессов. В таких случаях Q может быть выражено исходя из тока, возникающего под действием приложенной синусоидальной э. д. с. заданной угловой частоты ω [уравнение (16)]. Для цепей, изображенных на рис. 3,а и б, $Q = \omega L/R$ и ωCR соответственно. Это выражение Q согласуется с приведенным выше определением $Q = 1/R\sqrt{L/C}$ для настроенной цепи, если представить, что цепь рис. 3,а превращается в колебательную путем подключения последовательной емкости C , или цепь рис. 3,б — настраивается подключением параллельной индуктивности L на угловую частоту $\omega = 1/\sqrt{L/C}$. Тогда значение Q для этих цепей будет равно $\omega L/R$ и ωCR , если подключаемые элементы не вызывают заметных потерь энергии.

На рис. 8 представлены графики свободных колебаний в цепи, состоящей из R , L , C , рис. 5,б, для разных значений Q . Рис. 8,а соответствует критическому затуханию $Q = 0,5$. При $Q > 0,5$ процессы будут колебательными с амплитудами, убывающими по экспоненциальной огибающей, начерченной пунктирной линией. Начальные условия выбраны так, что $i = I_0$ и $q_0 = 0$ при $t = 0$. Для цепей с низким значением Q скорость убывания огибающей почти совпадает со скоростью изменения самих синусоидальных кривых, как это видно из рис. 8,в и г, так что за время спадания огибающей до определенной величины будет наблюдаться очень малое число колебаний. Если значение Q еще уменьшится то скорость убывания огибающей может быть больше скорости изменения кривой колебаний и цепь превращается в неколебательную, как в случае рис. 8,а и б. Критическое значение Q , соответствующее критическому затуханию цепи, для которого $R = 2\sqrt{L/C}$, равно

$$Q = 1/R\sqrt{L/C} = 0,5.$$

* Для параллельного соединения элементов (рис. 1,б) Q может быть определено как обратная величина этого значения или $1/Q = 1/R\sqrt{L/C}$, как это следует из уравнения (4) для этой цепи. Величина Q называется „добротностью“ контура.

Если бы сопротивление R в цепи было равно нулю, то Q стало бы бесконечно большим и колебания совершались бы непрерывно без затухания, как показано на рис. 10. При $R=0$ постоянная времени $1/\delta$ равна бесконечности, тогда как $\beta=1/\sqrt{LC}$ и из уравнения (37) получается выражение для синусоидального тока с постоянной амплитудой

$$i = I_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} - \frac{q_0}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}. \quad (40)$$

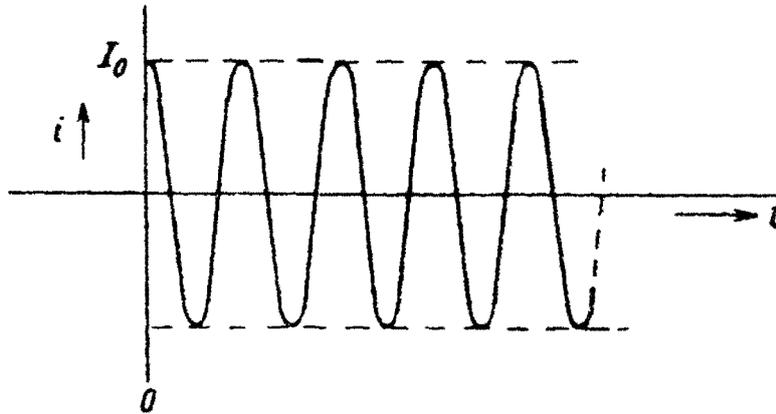


Рис. 10. Свободные колебания в контуре рис. 5,6 при $R=0$.

Ясно, что начальная фаза этого тока при $t=0$ зависит от отношения величин q_0/\sqrt{LC} и I_0 . На рис. 10 представлен случай, когда $q_0=0$ и колебания начинаются с максимального значения тока I_0 .

При отсутствии рассеяния энергии, огибающая колебаний превращается в прямую линию, а период колебания или полного изменения синусоидального тока сохраняется постоянным и равным $2\pi\sqrt{LC}$ независимо от того, измеряется ли он по максимумам или по нулевым значениям тока. Частота колебаний или число периодов в секунду равно обратной величине периода, т. е. частота незатухающих колебаний равна

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (41)$$

6. Модулированные колебания и огибающая

При изучении переходных процессов постоянно придется иметь дело с двумя видами кривых, представляющих колебания в цепях. Первый вид — это график модулированных колебаний, например, представленных уравнением (37), т. е. периодических колебаний, амплитуда которых изменяется по экспоненциальному закону $e^{-\delta t}$, являющихся собственными

колебаниями контура R, L, C (рис. 5,б). Второй вид — кривая, определяющая в соответствии с уравнением (30а) закон изменения амплитуды колебаний, называемая огибающей, определяемая законом $e^{-2\delta t}$ и являющаяся собственными колебаниями контура R, L (рис. 3,а).

В предыдущем параграфе было показано, что эти виды кривых являются характерными для колебаний в цепях двух типов: цепи, содержащей индуктивность и емкость, и цепи, в которой имеется только один элемент, накапливающий энергию, например, индуктивность. Правда, колебательный процесс в цепи из R, L и C (рис. 5,б) не имеет места, если величина Q меньше критического значения, но наше внимание будет сосредоточено на случаях, когда $Q > 0,5$.

Сравнение цепей, представленных на рис. 3,а и 5,б, и кривых токов в них показывает, что удаление емкости из цепи, состоящей из R, L и C , превращает модулированные колебания с огибающей $e^{-\delta t}$ в апериодический ток, изменяющийся по закону $e^{-2\delta t}$, т. е. имеющий форму огибающей, но с постоянной времени в два раза меньшей.

Чтобы получить в цепи из R и L ток, изменяющийся по закону огибающей колебаний в цепи из R, L и C , значение L необходимо удвоить.

Этот принцип можно также применить к паре параллельных цепей, одна из которых содержит параллельно соединенные R, L и C (рис. 1,б), а вторая — только R и C (рис. 3,б). Легко показать, что в первой цепи напряжение свободных колебаний между точками AB будет изменяться по закону синусоидальных модулированных колебаний, аналогичных показанным на рис. 9,б, а во второй это напряжение будет изменяться по закону огибающей колебаний в первой цепи, при условии, что величина емкости уменьшена в два раза.

Это очень важное положение, применение которого будет рассмотрено позднее*. Здесь же они приводятся для того, чтобы показать связь процессов, происходящих в простых цепях, содержащих R, L и C , и цепях, содержащих только R и L или R и C .

При исследовании более сложных цепей, к ним могут быть применены те же основные принципы. В сложной цепи, которая может быть разделена на простые цепи, содержащие R, L и C , будут иметь место свободные синусоидальные колебания, амплитуда которых будет изменяться по некоторой огибающей, не обязательно экспоненциальной. Если же

* См. § 33 гл. III — Аналогия фильтра нижних частот и полосового фильтра.

сложная цепь разделяется на более простые, содержащие только R и L или R и C , — процессы в ней будут неколебательными.

Имеется, конечно, большое число сложных цепей, которые не могут быть строго разделены на простые колебательные и неколебательные цепи; поэтому процессы в них могут носить смешанный характер. Однако такое разделение имеет важное значение и в этой книге часто будут упоминаться как модулированные синусоидальные колебания с определенной огибающей, так и сами огибающие.

7. Вынужденные колебания и общий ток в контуре

В последних двух параграфах была рассмотрена первая составляющая тока, возникающего в цепи под действием внезапно приложенной э. д. с. в момент $t=0$. Как было показано, форма этой составляющей зависит от параметров цепи, а амплитуда и начальное значение — от энергии, запасенной в цепи к моменту $t=0$. Эта составляющая тока определяется (для цепи общего вида, состоящей из R , L и C) решением уравнения (20б), в которое не входит действующая э. д. с.

Чтобы найти форму полного тока, являющегося результатом действия внезапно приложенной к зажимам цепи э. д. с., необходимо прибавить к первой составляющей вторую, которая может быть найдена решением уравнения (20а), но без ограничений во времени. Эта составляющая будет током, который возникает под действием непрерывной э. д. с. $E \cos(\omega_0 t + \varphi)$, но при определении полного тока нужно отбросить значения этой составляющей для $t < 0$.

Процесс определения суммарного тока остается одним и тем же для любой формы приложенной э. д. с. В некоторых случаях форма тока может быть определена по внешнему виду цепи и кривой э. д. с., но очень часто это оказывается невозможным и требуется прибегать к решению дифференциальных уравнений рассмотренных типов. Существуют так называемые операторные методы, упрощающие решение дифференциальных уравнений, но рассмотрение их выходит за пределы этой книги. Некоторые операторные методы позволяют решать уравнения с учетом начальных условий, поэтому не требуется искать два рассмотренных выше решения. К сожалению, эти методы, как правило, очень сложны математически и являются скорее орудием математика, чем инженера, которому приходится иметь дело со многими другими сторонами вопроса.

Можно считать достаточным рассмотрение здесь общего метода определения тока, вызываемого прерывной э. д. с. Этот метод состоит в отыскании решения для непрерывно действующей э. д. с., отбрасывании части его, относящейся ко времени $t < 0$ и учета прерывности э. д. с. путем определения тока, вызванного энергией, запасенной в цепи к моменту $t = 0$.

Необходимо сделать одно важное замечание: если в выражение для тока вводятся начальные условия для определения постоянных интегрирования, соответствующих свободным колебаниям, то их нужно вводить также в выражение для полного тока (т. е. суммы составляющих собственных и вынужденных колебаний) Ясно, что это должно быть именно так, потому что в момент $t = 0$ энергия, запасенная в цепи, расходуется независимо от присутствия э. д. с., имеющей определенное начальное значение.

Мы видели, что составляющая тока соответствующая собственным колебаниям, затухает со скоростью, зависящей от постоянной времени цепи, и после определенного времени ее можно считать ничтожно малой. То же справедливо для более сложных цепей, состоящих из нескольких контуров. Переходные процессы в них исчезают через некоторое время и цепь ведет себя так же, как в установившемся режиме, т. е. как если бы приложенная э. д. с. действовала до этого в течение бесконечно долгого времени.

Все э. д. с. подаются или включаются на зажимы цепи в некоторый определенный момент и по истечении некоторого времени, длительного по сравнению с постоянной времени цепи, переходные процессы можно считать прекратившимися и рассматривать практически режим цепи, как установившийся. Такое состояние цепи называется квазистационарным. Термины „незатухающие синусоидальные колебания“ и „установившийся режим“ являются в действительности математическими условностями и могут быть достигнуты практически только по истечении очень длительного времени после включения э. д. с.

8. Применение методов исследования установившегося режима к изучению переходных процессов. Понятие о полном сопротивлении цепи

В § 3 было показано, как можно найти ток, возникающий в цепи под действием приложенной э. д. с. (заданной формы), путем разложения этой э. д. с. на сумму элементарных составляющих экспоненциальной формы. Однако конкретные

аналитические методы, позволяющие произвести такое разложение, не были еще указаны—они являются содержанием следующей главы. До сих пор было только установлено, что ряд, состоящий из составляющих экспоненциальной формы, удовлетворяет дифференциальным уравнениям, описывающим процессы в цепи.

Важное отличие этого метода от только что рассмотренного, дающего возможность найти решение для э. д. с., которая определена лишь для времени $t \geq 0$, состоит в том, что первый применим только при условии, что форма приложенной э. д. с. известна для времени t от $-\infty$ до $+\infty$ и вопрос о действии запасенной в цепи энергии не возникает.

Э. д. с. любой формы, даже имеющие нулевую амплитуду до $t=0$ (рис. 4), можно рассматривать состоящими из большого числа составляющих. Кривые этих э. д. с. имеют разрыв непрерывности в момент $t=0$, но их форма может быть воспроизведена с любой желаемой точностью, если взять достаточное число экспоненциальных составляющих. Это число может доходить до бесконечности, как будет показано позднее, при переходе к интегралу Фурье и более детальному анализу переходных процессов.

Нарушение непрерывности приложенной э. д. с. иногда вызывается переключениями или другими действиями, внезапно изменяющими конфигурацию цепи. В таких случаях ток в цепи вычисляют, рассматривая приложенную э. д. с. после $t=0$, и переходную э. д. с., вызванную нарушением непрерывности. Но можно воспроизвести действие, вызываемое переключением, приложением к цепи соответствующей э. д. с., так что даже задачи, связанные с изменением конфигурации цепи, могут быть сведены, при желании, к задачам установившегося режима. Такие задачи можно решать разложением приложенной э. д. с. в эквивалентный ряд экспоненциальных составляющих. Нельзя утверждать, что этот метод лучший, следует лишь сравнить оба метода.

В заключение рассмотрим кратко вопрос о применении методов установившегося режима к анализу переходных процессов с другой стороны. В качестве примера возьмем опять схему рис. 1,а.

В § 3 было доказано, что ток в этой цепи должен выражаться суммой экспоненциальных составляющих [уравнение (13)], так что приложенная э. д. с. e также может быть представлена в виде суммы элементарных экспоненциальных э. д. с. [уравнение (14)]. Из сопоставления этих уравнений видно, что составляющие тока и э. д. с. имеют одинаковую

форму и можно считать, что каждая составляющая э. д. с. дает свою составляющую тока.

Отношение приложенной э. д. с. к вызываемому ей току получается равным [из уравнений (13) и (14)]:

$$\frac{e}{i} = \frac{I_1 (m_1 L + R + 1/m_1 C) e^{m_1 t} + I_2 (m_2 L + R + 1/m_2 C) e^{m_2 t} + \dots}{I_1 e^{m_1 t} + I_2 e^{m_2 t} + \dots} \quad (42)$$

и в этом общем виде является функцией времени. Это отношение известно под названием „полного сопротивления цепи“ для определенной формы тока i . Понятие о полном сопротивлении в общем виде не представляет большого интереса, но некоторые частные случаи его находят широкое применение; например, полное сопротивление для синусоидального тока, которое будет применяться в соответствующих случаях. Полное сопротивление для „толчка“ или „скачка“ напряжения (рис. 4,а) также применяется в некоторых операторных методах анализа цепей. Для иллюстрации применения этого понятия предположим, что к цепи рис. 1,а приложен скачок и форма вызванного им тока известна (например, снята с помощью осциллографа или другим способом, что в данном случае не представляет интереса). Тогда отношение мгновенных значений э. д. с. и тока e/i явится характеристикой данной цепи для толчка э. д. с. любой произвольной амплитуды при условии, что цепь линейна. Это отношение называется „переходным сопротивлением“, а обратная величина — „переходной проводимостью“, если они относятся к приложенной э. д. с. скачкообразной формы. Зная переходное сопротивление для конкретной цепи, являющееся, конечно, функцией времени, можно вычислить ток в цепи, вызываемый э. д. с. любой другой формы, применяя принцип суперпозиции, как будет показано в главе IV.

Для э. д. с. чисто экспоненциальной формы, приложенной к цепи, получается простейшее выражение для полного сопротивления. Как видно из уравнений (10) и (11), допущение, что в дифференциальное уравнение для тока в цепи входит только один экспоненциальный член, предполагает, что приложенная э. д. с. должна быть также чисто экспоненциальной. Отношение э. д. с. к току принимает вид

$$\frac{e}{i} = \frac{I (mL + R + 1/mC) e^{mt}}{I e^{mt}} = mL + R + 1/mC, \quad (43)$$

которое уже встречалось раньше и было названо „функцией, зависящей от параметров цепи“ [см. уравнение (9)].

В данном случае оно представляет полное сопротивление цепи для тока, убывающего по экспоненциальному закону, и постоянно, в противоположность полному сопротивлению для тока общей формы [уравнение (42)], которое является функцией времени. Отсюда следует, что ток, возникающий в данной цепи под действием э. д. с. экспоненциальной формы, может быть выражен через некоторую постоянную. Зная эту постоянную для каждой экспоненциальной составляющей э. д. с. сложной формы, которая может быть представлена в виде ряда [уравнение (14)], можно вычислить ток в цепи, вызываемый этой э. д. с. путем простого сложения по принципу суперпозиции.

Наиболее важное и часто применяемое выражение для полного сопротивления выводится из специальной формы показательной функции, введенной в § 3, с мнимым значением показателя степени m . В уравнении (15) ток был представлен в виде $i = I e^{j\omega t}$, соответствующем незатухающему синусоидальному току. Введение мнимого показателя вполне допустимо, так как выражение для тока в таком виде удовлетворяет дифференциальному уравнению. Но более удобный вывод выражения для полного сопротивления синусоидальному току можно сделать путем прямой подстановки тока $i = \cos \omega t$ из уравнения (16) в дифференциальное уравнение (3) для цепи. Это дает

$$I[R \cos \omega t - (\omega L - 1/\omega C) \sin \omega t] = e, \quad (44)$$

которое можно переписать в виде $I' \cos(\omega t + \omega t_1) = e$, где

$$I' = I \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \omega t_1 = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (45)$$

Таким образом, полное сопротивление цепи для синусоидального тока равно

$$\frac{e}{i} = \frac{I' \cos(\omega t + \omega t_1)}{I \cos \omega t}. \quad (46)$$

Здесь э. д. с. e и ток i являются синусоидальными функциями времени с одинаковым периодом, но сдвигом во времени на t_1 . Хотя отношение мгновенных значений e/i является в общем виде функцией времени, но если принять во внимание этот относительный сдвиг, то его можно считать постоянным. Тогда для определения тока, вызываемого в цепи действием синусоидальной э. д. с., необходимо знать две величины:

1) абсолютное значение величины e/i , записываемое обычно в виде $|e/i|$ и называемое „модулем“, который в данном случае равен

$$|e/i| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2};$$

2) относительный сдвиг во времени t_1 , учитываемый обычно углом ωt , называемым „фазовым углом“.

Это понятие полного сопротивления является конечно, полным сопротивлением установившемуся переменному току, которое применяется при расчете установившихся процессов и является основой векторного метода анализа цепей.

Более сложные э. д. с. могут быть опять представлены в виде суммы элементарных э. д. с., как в уравнении (13), с мнимыми показателями степени $j\omega_1$, $j\omega_2$ и т. д. Ток в цепи, вызываемый э. д. с. такой сложной формы, может быть вычислен в виде суммы составляющих, обусловленных элементарными синусоидальными э. д. с., которые могут складываться на основе принципа суперпозиции.

Этот метод известен под названием метода разложения в ряд Фурье, вопросы применения которого займут значительную часть последующих глав.

ГЛАВА II

ЧАСТОТНЫЕ СПЕКТРЫ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ И РАЗЛИЧНОГО ВИДА ИМПУЛЬСОВ

9. Незатухающие синусоидальные колебания; их применение в теоретическом анализе и практике

Хотя незатухающие синусоидальные колебания являются наиболее широко применяемым видом колебаний в анализе цепей, однако, они не являются „нормальным“ видом колебаний, так как все колебания, начинающиеся в определенный момент времени, не сразу достигают установившегося значения. Кроме того, все реальные пассивные цепи (не содержащие внутренних источников энергии) в определенной мере рассеивают энергию, так что возникшие в них колебания должны затухать с течением времени, как было показано в § 5. Эти затухающие синусоидальные колебания являются, поэтому, более „нормальной“ формой колебаний, но они не столь популярны в анализе цепей, хотя имеется очень удобный метод, основанный на их применении.

Широкое применение незатухающих синусоидальных колебаний обусловлено многими очевидными причинами.

1. Они являются основой элементарной теории переменных токов и приводят к очень простым решениям дифференциальных уравнений, с которыми приходится иметь дело в теории цепей.

2. Синусоидальная э. д. с. является э. д. с., даваемой идеальным генератором переменного тока. Ее можно рассматривать как э. д. с., возникающую в катушке, вращающейся в однородном магнитном поле.

3. Характеристика фильтров и большого разнообразия цепей стандартного типа определяются из условий действия на них синусоидальных колебаний (т. е. частотные характеристики цепей для этих колебаний широко известны, тогда как сведения о поведении цепей при воздействии на них колебаний другой формы очень скудны).

По этим, а также и другим соображениям, анализ процессов, возникающих в цепях под действием импульсов, скачкообразных э. д. с. и других э. д. с. сложной формы, методом незатухающих синусоидальных колебаний изучен лучше всего.

Прежде чем переходить к анализу действия электродвижущих сил сложной формы путем разложения их на простые синусоидальные э. д. с., следует рассмотреть некоторые вопросы, связанные с применением векторов в теории переменных токов, так как эти вопросы имеют важное значение для геометрических представлений изучаемых процессов.

10. Вектор переменной э. д. с. Тригонометрическая и показательная формы его записи

Иногда возникают затруднения в связи с двумя типами обозначений векторов, применяемых в теории переменных токов, хотя в основе обоих обозначений лежит один и тот же геометрический смысл. В элементарном представлении вектор в теории переменных токов рассматривается как вращающийся отрезок прямой, проекция которого на некоторую неподвижную ось изменяется синусоидально с течением времени и может рассматриваться как „генерирующий“ синусоидальную волну. Этот вектор можно представить себе расположенным в плоскости катушки, вращающейся в однородном магнитном поле, так что проекция его дает в каждый момент амплитуду э. д. с., индуктируемой в катушке.

Не останавливаясь здесь на этом подробнее и считая, что читатель знаком с простыми применениями векторов в теории переменных токов, перейдем к выяснению соотношений между двумя обозначениями векторов.

В § 3 гл. I было показано, что незатухающие синусоидальные колебания могут быть представлены в двух математических видах:

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad i = I e^{j\omega t} \\ б) \quad i = I \cos \omega t \end{array} \right\}, \quad (47)$$

и что каждый из этих видов может быть применен для отыскания решения дифференциального уравнения.

Выражение б) является тригонометрической формой и представляет непосредственно синусоидальную кривую тока. Оно равно действительной части выражения а), так как

$$в) \quad I e^{j\omega t} = I \cos \omega t + j I \sin \omega t. \quad (47)$$

Рассмотрим теперь вектор, представленный в комплексной плоскости (рис. 11). Это вектор длины I , вращающийся с угловой скоростью ω радиан/сек. Допустим, что в момент $t=0$ этот вектор располагается вдоль действительной оси OR . Проекции его на две перпендикулярные оси в любой момент времени будут

$$\left. \begin{aligned} OA &= I \cos \omega t \\ OB &= I \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Отсюда следует, что этот вектор, равный геометрической сумме проекций, представляет выражение $I e^{j\omega t}$, так как

$$OE = (OA + jOB) = I (\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

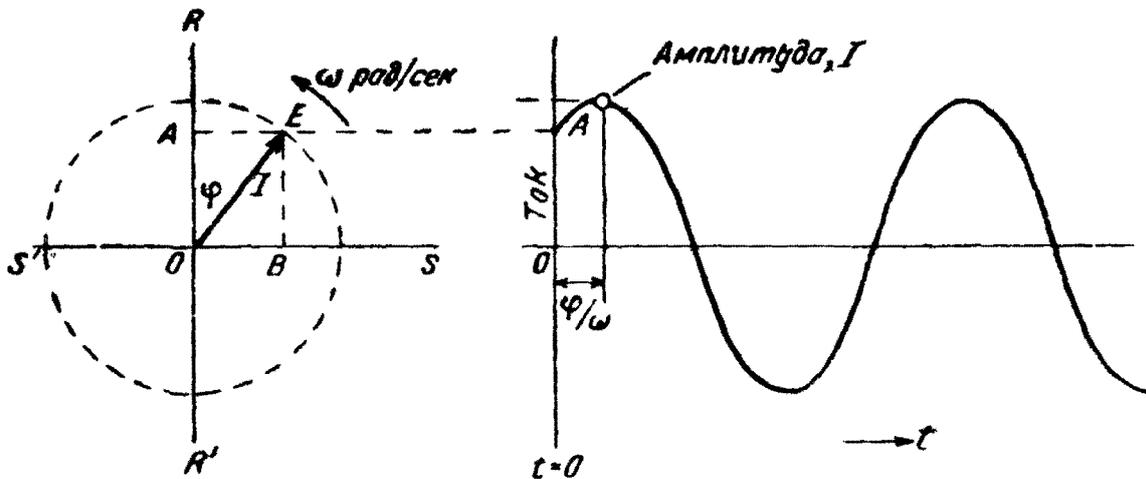


Рис. 11. Вращающийся вектор переменного тока.

Проекция OA на действительную ось изменяется синусоидально во времени и представлена в виде графика на рис. 11. Если в момент $t=0$ вектор находится в положении, показанном на рисунке, то синусоида начнется не с нуля, а ее максимум будет сдвинут на фазовый угол φ , соответствующий времени $t = \varphi/\omega$ сек. Аналогично на векторной диаграмме вектор OE сдвинут относительно действительной оси на угол φ радиан. В этом положении вектора геометрическая сумма его проекций на две взаимноперпендикулярные оси будет равна

$$i = I [\cos (\omega t - \varphi) + j \sin (\omega t - \varphi)], \quad (49)$$

что равносильно

$$i = I e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (50)$$

или

$$i = I e^{-j\varphi} e^{j\omega t}. \quad (51)$$

Это показывает математическую простоту применения показательной формы комплексного числа для представления векторов.

Из уравнения (51) видно, что величина $e^{j\omega t}$ имеет комплексную амплитуду $I e^{-j\varphi}$, которая, следовательно, может быть представлена на диаграмме неподвижным вектором длиной I , сдвинутым на фазовый угол $-\varphi$ относительно положительной действительной оси (выбранной за начало отсчета). Это, конечно, тот же вектор, что и представленный на рис. 11, но около него не должна стоять стрелка, указывающая на вращение вектора со скоростью ω радиан/сек. Мы как бы опускаем переменную $e^{j\omega t}$ в уравнении (51) и подразумеваем, что кривая, выражаемая этим вектором, является чисто синусоидальной и частота ее известна. Векторы, вращающиеся с одинаковой угловой скоростью, могут складываться на таких диаграммах, так как они все неподвижны относительно друг друга.

Относительное неудобство тригонометрической формы для аналитических выражений можно видеть из сопоставления приведенного выше выражения в показательной форме с выражением

$$i = I \cos(\omega t - \varphi), \quad (52)$$

которое представляет тот же вектор. Здесь амплитуда и фаза разделены и в анализе необходимо применять полностью это выражение.

Этот вектор может быть также представлен в виде суммы проекций на перпендикулярные оси

$$i = I \cos \varphi \cos \omega t + I \sin \varphi \sin \omega t \quad (53)$$

или в виде вектора величиной

$$i = \sqrt{OA^2 + OB^2} \quad (54)$$

и угла $\arctg OB/OA$.

Важное значение уравнения (53) состоит в том, что оно показывает возможность представления вращающегося вектора в виде суммы двух ортогональных составляющих, амплитуда которых изменяется во времени.

Максимальные значения амплитуд этих составляющих равны соответственно

$$I \cos \varphi \text{ и } I \sin \varphi. \quad (55)$$

Эти понятия будут использованы позднее при рассмотрении векторов, вращающихся с неравномерной скоростью и изменяющихся по длине. В данном случае ортогональные

составляющие представляют вектор, вращающийся с постоянной скоростью. Для удобства эти составляющие вектора будут в дальнейшем называться находящимися „в фазе“ и „в квадратуре“.

11. Сопряженные векторы

Имеется другой очень простой способ рассмотрения векторов, представляющих переменные токи и э. д. с., который, как будет показано ниже, также и более логичен.

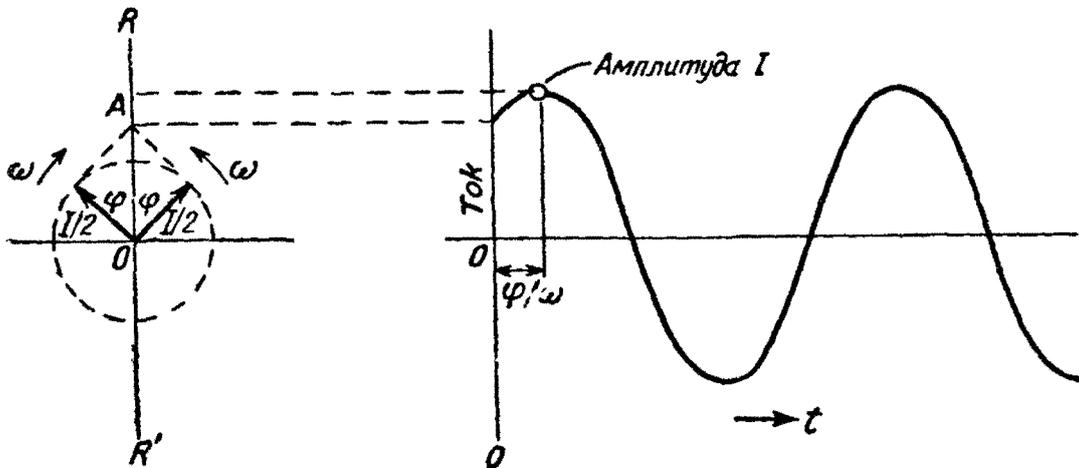


Рис 12. Сопряженные векторы.

Трудности, возникающие в связи с необходимостью примириться с применением комплексных чисел для представления синусоидально меняющихся величин (действительных величин), могут быть преодолены следующим образом. Рассмотрим опять вектор, изображенный на рис. 11, и его выражение в форме

$$i = I [\cos (\omega t - \varphi) + j \sin (\omega t - \varphi)]. \quad (56)$$

Это выражение может быть преобразовано так, что оно будет представлять синусоидальный ток $i = I \cos (\omega t - \varphi)$, если использовать „сопряженный вектор“

$$i = I [\cos (\omega t - \varphi) - j \sin (\omega t - \varphi)], \quad (57)$$

и уменьшить длину обоих векторов в два раза, чтобы получить правильное значение амплитуды. Это ясно из простого сложения уравнений (56) и (57). Два таких сопряженных вектора показаны на рис. 12.

Принимается, что эти векторы вращаются в противоположных направлениях с угловой скоростью ω , и сумма проекций

их на действительную ось изменяется синусоидально во времени, а сумма проекций на мнимую ось постоянно равна нулю. Так как векторы вращаются в противоположных направлениях, то соответствующие угловые скорости равны $\pm\omega$. Это приводит к понятию об „отрицательной частоте“. Физический смысл ее не существен, так как применение векторов носит чисто операторный характер, но применение отрицательной частоты в вычислениях вполне законно и дает удобные практические результаты, если этим пользоваться сознательно, так же, как, например, пользуются оператором j . Следует, например, помнить, что

$$\cos(-\omega t) = \cos \omega t \quad \text{и} \quad \sin(-\omega t) = -\sin \omega t, \quad (58)$$

и это не должно вызывать недоумений.

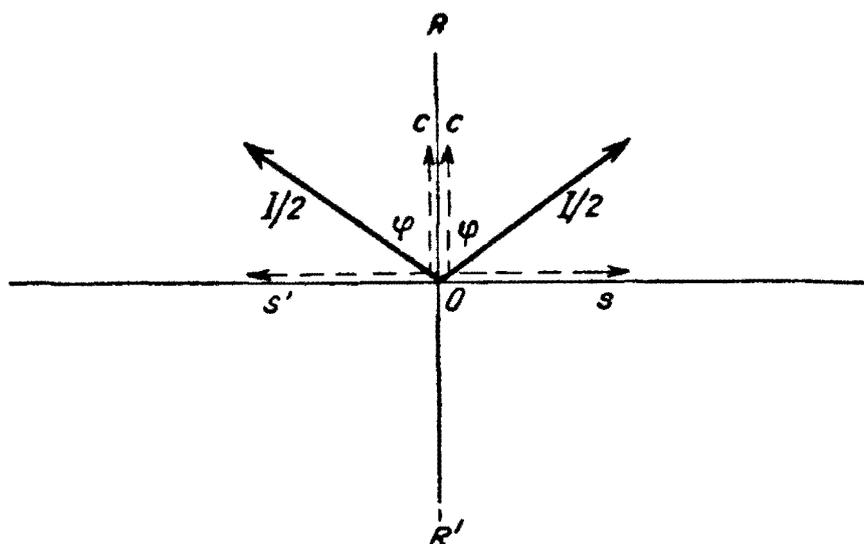


Рис. 13. Косинусные и синусные составляющие сопряженных векторов.

Сопряженные векторы должны всегда рассматриваться парами, причем каждая пара представляет одно синусоидальное колебание. Каждый из парных векторов может быть разложен на две составляющие, так же как одиночный вектор разлагается на составляющие, находящиеся в квадратуре, одна из которых (располагающаяся в момент $t=0$ вдоль действительной оси) дает косинусоиду, а вторая (располагающаяся в момент $t=0$ вдоль мнимой оси)—синусоиду.

На рис. 13 показаны ортогональные составляющие сопряженных векторов, представленных на рис. 12 и в уравнениях (56) и (57). Составляющие, лежащие вдоль действительной оси, представляют косинусоиды, а лежащие вдоль

мнимой оси — синусоиды. На этом основании можно назвать эти оси осью косинусов и осью синусов соответственно.

Длина составляющих должна быть

$$\left. \begin{aligned} OC &= \frac{I}{2} \cos \varphi \\ OS &= \frac{I}{2} \sin \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (59)$$

т. е. такой же, как для одиночного вектора [уравнение (55)] с той лишь разницей, что в данном случае косинусоидальная составляющая будет состоять из двух положительных векторов, а синусоидальная — из одного положительного и одного отрицательного вектора.

Составляющие двух сопряженных векторов, примененных для изображения синусоидальной кривой с произвольной начальной фазой φ при $t=0$, всегда будут образовывать такие пары. Первая пара составляющих с одинаковым знаком называется „четной“ или „симметричной“ парой („симметрия 1-го рода“), а вторая пара составляющих с противоположными знаками называется „нечетной“ парой, обладающей „симметрией 2-го рода“.

Четная пара представляет косинусоиду (так как сумма образующих ее составляющих имеет максимальное амплитудное значение при $t=0$), а нечетная — синусоиду (сумма составляющих при $t=0$ равна нулю).

12. Частотный спектр простого синусоидального колебания

„Частотная характеристика“ или частотный спектр простой синусоидальной кривой (рис. 11) может быть представлен на оси частот вертикальной линией, длина которой пропорциональна амплитуде I (рис. 14). Чтобы кривая была представлена полностью, необходимы две диаграммы: одна, представ-

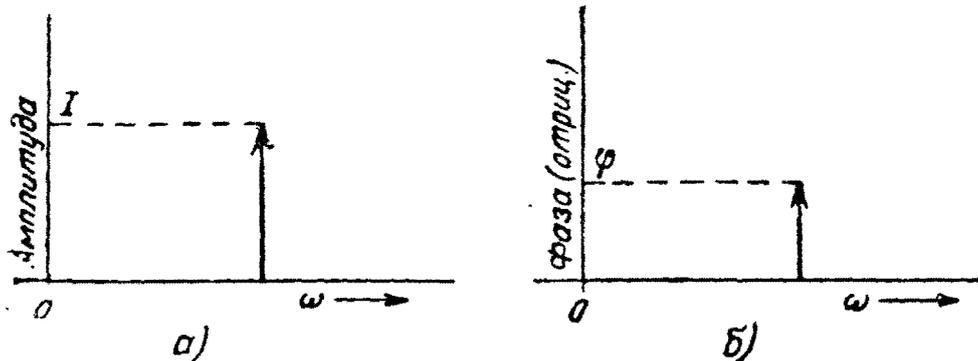


Рис. 14. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры синусоидального колебания $i = I \cos(\omega t - \varphi)$.

ляющая амплитуду I и другая, представляющая фазу φ . Далее, из диаграммы должно быть ясно, является ли представляемая кривая синусоидой или косинусоидой, так как одна и та же диаграмма может изображать спектры кривых $i = \cos(\omega t - \varphi)$ и $i = I \sin(\omega t - \varphi)$.

Более простой и более логичный способ изображения частотных характеристик или спектров получается при использовании сопряженных составляющих, рассмотренных в предыдущем параграфе.

Косинусоидальные и синусоидальные составляющие вектора (рис. 13), названные нами четной и нечетной парами, могут быть изображены на оси частот, как показано на рис. 15.

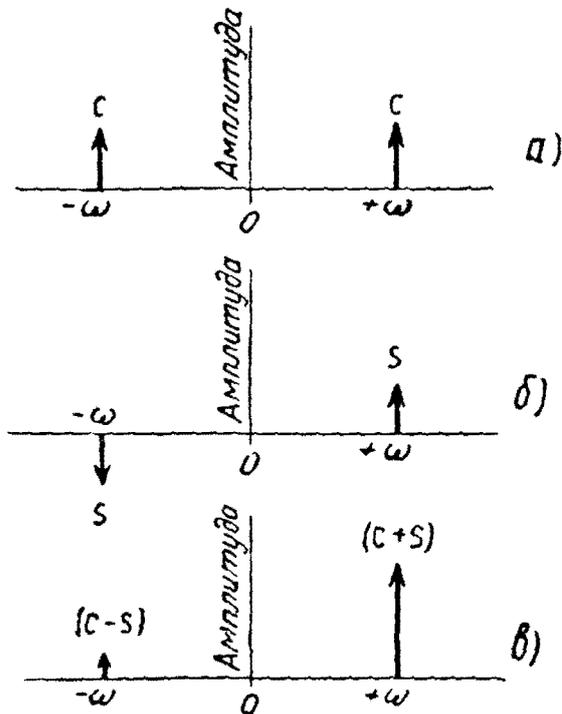


Рис. 15. Спектры сопряженных составляющих синусоидального колебания: а) косинусная или симметричная составляющая (симметрия 1-го рода); б) синусная составляющая, симметрия 2-го рода; в) арифметическая сумма а и б, дающая полный спектр.

Длина составляющих дается уравнением (59) и соответствует отрезкам OC и OS на рис. 13.

Как видно, косинусоидальные составляющие представлены на рис. 15 парой симметричных линий одинаковой длины OC и одного знака, расположенных в точках $\pm \omega$. Синусоидальные составляющие представлены парой линий с симметрией 2-го рода одинаковой длины OS , но противоположного знака, расположенных в точках $\pm \omega$.

Что эти две пары линий совместно представляют кривую тока i , можно легко проверить сложением. Обозначив длины OC и OS символами C и S соответственно, получим суммы составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \text{косинусоидальные составляющие} & \text{--- } |C| \cos \omega t + |C| \cos(-\omega t) \\ \text{синусоидальные составляющие} & \text{--- } |S| \sin \omega t + |S| \sin(-\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Но, так как $C = (I/2) \cos \varphi$ и $S = (I/2) \sin \varphi$, общая сумма равна

$$(I/2) \cos \varphi \cos \omega t + (I/2) \cos \varphi \cos \omega t + \\ + (I/2) \sin \varphi \sin \omega t + (I/2) \sin \varphi \sin \omega t = I \cos(\omega t - \varphi).$$

Обе части полной диаграммы частотного спектра (четная и нечетная пары) могут быть соединены в одну диаграмму путем прямого арифметического сложения. Это выполнено на рис. 15, в. Составляющая частоты $+\omega$ имеет длину $(C+S) = I/2 (\cos \varphi + \sin \varphi)$, а составляющая частоты $-\omega$ длину $(C-S) = I/2 (\cos \varphi - \sin \varphi)$. Каждая из них является алгебраической суммой синусоидальных и косинусоидальных составляющих и если диаграмма построена в таком виде, то можно разделить эти составляющие путем сложения и вычитания длин $(C+S)$ и $(C-S)$.

Методы изображения синусоидальных величин с помощью частотного спектра и векторных диаграмм их сопряженных составляющих не являются различными методами. Они заполняют разрыв между показательной формой комплексного числа, очень удобной для аналитических выражений, и тригонометрической формой, которая нагляднее выражает существенно действительную величину — синусоидальные колебания.

В следующих параграфах будет показано, что таким же образом может быть представлен спектр амплитудно-модулированных колебаний, а при переходе к анализу колебаний более сложной формы и неустановившихся процессов будет выявлена логичность и ясность этого метода.

13. Векторные диаграммы и частотные спектры несинусоидальных колебаний

Предположим, что имеется несколько генераторов синусоидальных э. д. с. с нулевым внутренним сопротивлением, соединенных, как показано на рис. 16, каждый из которых дает свою составляющую общего тока, протекающего через сопротивление нагрузки.

Если э. д. с. и частота генераторов различны ($E_1, E_2 \dots$ и т. д., $\omega_1, \omega_2 \dots$ и т. д.), то возникает важный вопрос о методике представления тока i в виде векторной диаграммы или частотного спектра. Этот ток, являющийся суммой синусоидальных токов различных частот (и амплитуд), будет

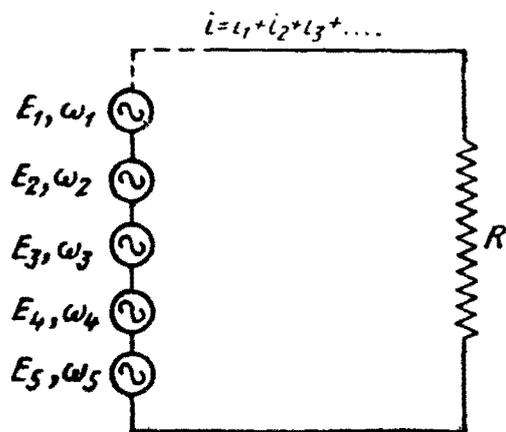


Рис. 16. Получение тока сложной формы с помощью нескольких последовательно включенных генераторов синусоидальных колебаний.

несинусоидальным, поэтому до тех пор, пока не выбран момент отсчета времени, понятие об относительном сдвиге фаз не имеет смысла.

Если выразить результирующий ток в виде

$$i = I_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + I_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + I_3 \cos(\omega_3 t - \varphi_3) \dots, \quad (61)$$

где $I_n = E_n/R$, то это будет означать, что начало отсчета $t=0$ выбрано так, что в этой точке мгновенные амплитуды токов будут

$$I_1 \cos(-\varphi_1), I_2 \cos(-\varphi_2), \text{ и т. д.} \quad (62)$$

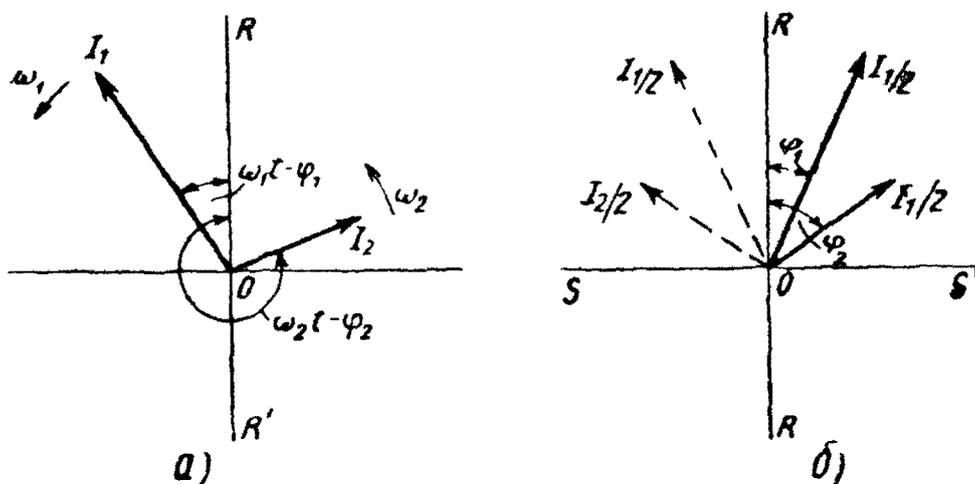


Рис. 17. Векторная диаграмма двух синусоидальных колебаний разных частот:

а) вращение векторов; б) сопряжение векторов при $t=0$.

Фазовые углы φ_1, φ_2 и т. д. относятся к этому началу отсчета. Таким образом определены временные соотношения между отдельными э. д. с., и результирующая форма тока выразится уравнением (61).

Представление двух синусоидальных волн одинаковой частоты на одной векторной диаграмме не вызывает трудностей, так как векторы неподвижны относительно друг друга и, как в случае рис. 11, оба они вращаются с угловой скоростью ω . Но если векторы представляют синусоидальные волны различных частот, то их нужно рассматривать вращающимися относительно друг друга. Два таких вектора показаны на рис. 17,а для определенного момента времени. Результирующий вектор для этого момента может быть найден обычным способом по правилу параллелограмма, но с изменением времени будет изменяться его длина и угловая скорость. Однако, его проекция на действительную ось ROR' в каждый момент времени будет представлять величину

результатирующего тока, так как он равен сумме проекций отдельных векторов. То же самое справедливо для любого числа синусоидальных волн различных частот. Однако, такая диаграмма не приносит большой пользы и лучше пользоваться диаграммой неподвижных векторов, представляющих токи в уравнении (62). Положение этих векторов соответствует значениям различных составляющих в момент $t=0$ и диаграмма будет изменяться при изменении начала отсчета, хотя для каждого начального момента векторы будут неподвижны.

На рис. 17,б показана стационарная векторная диаграмма, на которой нанесены также сопряженные векторы (пунктирные линии). Сумма проекций всех векторов на действительную ось дает амплитуду результирующего тока в момент $t=0$. Сумма проекций на ось SOS' для любого момента времени равна нулю. Если начало отсчета времени зафиксировано, то сколько бы ни было составляющих тока i сложной формы, все они могут быть представлены парами таких неподвижных векторов. Сумма проекций векторов на ось ROR' будет пропорциональна величине результирующего тока в момент $t=0$.

Чтобы представить такой векторной диаграммой значение тока i для всех моментов времени, необходимо указать частоту каждой пары векторов. Но если представить эти составляющие в виде частотного спектра, то он будет содержать все необходимые данные для определения величины результирующего тока и его формы.

На рис. 18,а представлен частотный спектр кривой сложной формы, построенный так же, как частотный спектр синусоидальной кривой (рис. 15, а и б). Косинусоидальные составляющие представлены линиями, располагающимися симметрично относительно нулевой частоты, длина которых равна проекциям векторов на ось ROR' (рис. 17,б), а синусоидальные составляющие — линиями, обладающими симметрией 2-го рода и имеющими длину, равную проекциям векторов на другую ось — SOS' . Сумма всех этих составляющих дает значение результирующего тока [уравнение (61)] при выбранном начале отсчета.

В § 3 гл. I было показано, что электрические колебания любой формы могут быть разложены в ряд (возможно и бесконечный) простых синусоидальных колебаний. Можно считать, что такие сложные колебания создаются рядом последовательно соединенных генераторов, питающих сопротивление нагрузки (рис. 16). Частотный спектр показывает величины и фазы синусоидальных составляющих, дающих в сумме сложное колебание.

При описанном здесь способе построения частотного спектра в виде косинусоидальных C и синусоидальных S составляющих, амплитуды и фазы составляющих тока выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{амплитуда равна } \sqrt{C^2 + S^2}, \\ \text{а фазовый угол } \operatorname{arctg} S/C. \end{array} \right\} \quad (63)$$

В дальнейшем будут рассмотрены специальные виды колебаний — модулированные по амплитуде, периодические несинусоидальные, импульсы определенной длительности и т. д.

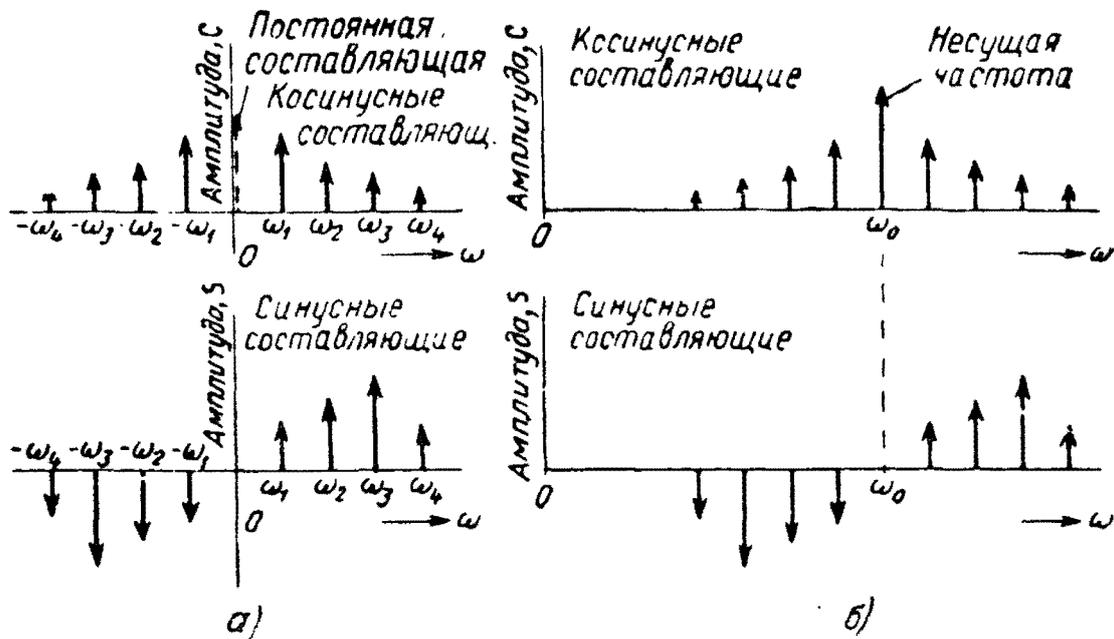


Рис. 18. Спектры колебаний сложной формы, содержащих несколько синусоидальных составляющих:

а) спектр колебания сложной формы; б) спектр колебания, модулированного по амплитуде.

и их частотные спектры, а также другие виды колебаний, являющиеся комбинацией или разновидностью этих „стандартных“ видов.

До сих пор рассматривались колебания общего вида, состоящие из любого числа синусоидальных колебаний с произвольными амплитудами и фазами. Эти колебания могут иметь любую форму, но эта форма будет „стандартной“ только при условии, если между амплитудами, частотами или фазами составляющих существуют вполне определенные соотношения.

В этом параграфе речь шла, главным образом, о форме кривой тока, но само собой разумеется, что все сказанное полностью применимо и к кривым напряжения. Дело только в удобстве рассмотрения.

14. Периодические кривые. Гармонические составляющие ряда Фурье

Несколько различных синусоидальных кривых называются „гармоническими“, если их частоты кратны некоторой частоте ω_1 , называемой „основной (угловой) частотой“.

Выражение (61) для ряда таких составляющих может быть переписано следующим образом:

$$i = I_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + I_2 \cos(2\omega_1 t - \varphi_2) + I_3 \cos(3\omega_1 t - \varphi_3) + \dots + I_N \cos(N\omega_1 t - \varphi_N) + \dots \quad (64)$$

Ряд из гармонических составляющих является хорошо известным рядом Фурье. Конечно, некоторые из этих составляющих ряда могут отсутствовать, но выражение (64) является общим выражением ряда. Амплитуды $I_1, I_2 \dots I_N$ и фазовые углы $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_N$ пока еще произвольны и результирующая кривая тока i может принимать бесконечно большое число различных форм при их изменении, хотя частота каждой составляющей остается постоянной.

Для того, чтобы представить таким гармоническим рядом некоторую кривую, необходимо определить амплитуды и фазы каждой ее составляющей.

Предположим, что векторная диаграмма (рис. 17,а) представляет две гармонические кривые, так что, например, $\omega_2 = 2\omega_1$. Тогда вектор I_2 будет вращаться вокруг начальной точки в два раза быстрее вектора I_1 . Через два периода векторы будут находиться в исходном положении. Аналогичная картина будет при наличии любого числа векторов вращающихся с угловыми скоростями $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1 \dots N\omega_1$.

Если $N\omega_1$ является наивысшей частотой, то все векторы будут снова в исходном положении после N оборотов этого вектора, что соответствует одному обороту основного вектора (ω_1).

Таким образом, проекция результирующего вектора на ось $RO R'$, представляющая амплитуду сложной волны, будет повторяться через определенные интервалы, длина которых соответствует периоду основной гармонике. Кривые, которые могут быть представлены гармоническим рядом, называются периодическими. Точная форма их определяется амплитудами и фазами гармонических составляющих. С другой стороны, как уже было показано, частотный спектр удобнее выразить в виде косинусоидальных (четных) и синусоидальных (нечетных) сопряженных составляющих.

Спектр рис. 18,а будет представлять периодическую кривую, если составляющие будут равномерно расположены по оси частот, т. е. если $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ и т. д. будут равны $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1 \dots$ и т. д. соответственно.

Период повторения кривой зависит от основной угловой частоты ω_1 ;

частота основной гармоники

$$f_1 = \omega_1 / 2\pi \text{ гц.} \quad (65)$$

Отсюда основной период равен

$$T_0 = 2\pi / \omega_1 \text{ сек/пер.} \quad (66)$$

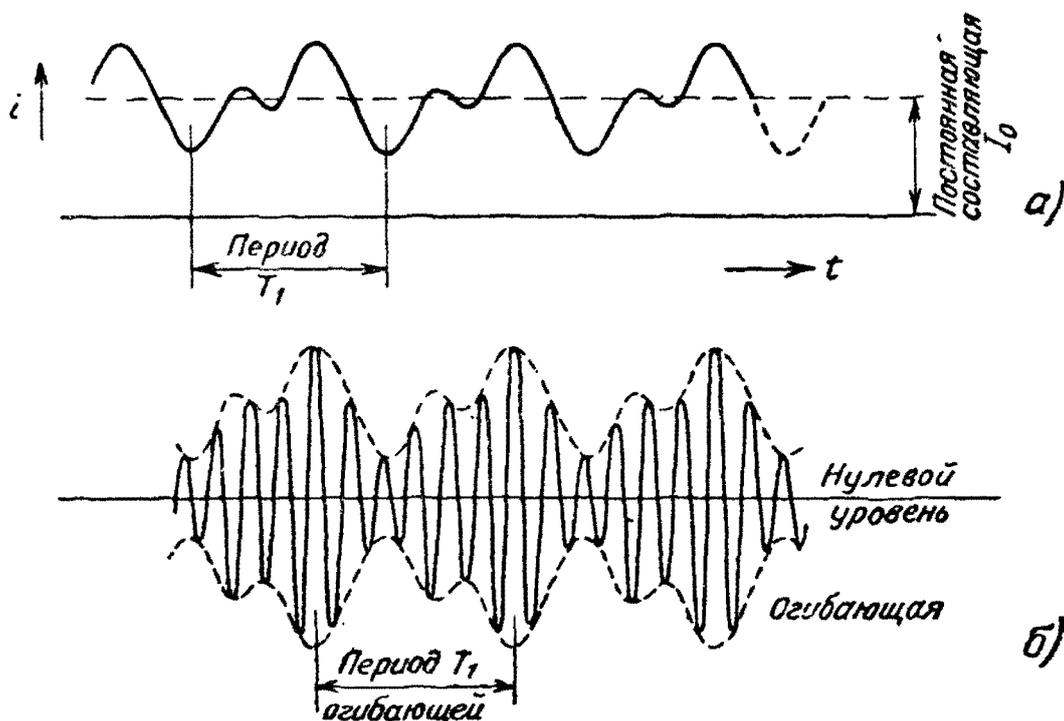


Рис. 19. Периодические колебания сложной формы:
а) огибающая, содержащая постоянную составляющую; б) несущая частота, модулированная огибающей i .

На рис. 19,а представлена такая периодическая (несинусоидальная) кривая тока, содержащего также постоянную составляющую, равную среднему значению тока за период. Постоянную составляющую можно рассматривать как составляющую нулевой частоты. На частотном спектре она может быть представлена двумя сопряженными составляющими нулевой частоты, равными в сумме I_0 . Составляющие нулевой частоты должны быть косинусоидальными, так что

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \omega_0 = 0 \quad I_0 \cos \omega t = I_0 \\ I_0 \sin \omega t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Сказанное в этом параграфе относится в большей мере к получению сложной периодической кривой, из элементарных синусоидальных кривых. Позднее будет рассмотрен вопрос о разложении данной сложной кривой на элементарные составляющие.

15. Амплитудно-модулированные колебания

Незатухающие синусоидальные колебания, применяемые в системах связи для передачи сигналов с помощью того или иного вида модуляции, называются „несущими колебаниями“.

Предположим, что такие незатухающие колебания имеют форму

$$i = I_E \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (68)$$

Из этого выражения видно, что сигнал может передаваться за счет изменения I_E , ω_0 или φ_0 в соответствии с характером этого сигнала. В результате получаются колебания, модулированные по амплитуде, частоте или фазе. Если изменяется более чем одна из этих величин, то получаются смешанно-модулированные колебания („гибридные“ колебания). Следствием модуляции является расширение частотного спектра несущей частоты (с угловой частотой ω_0) настолько, что он будет охватывать целую полосу частот. Синусоидальные составляющие этой полосы частот, дающие при сложении модулированные колебания, называются „боковыми частотами“.

Наиболее важным видом модуляции, с точки зрения вопросов, разбираемых в этой книге, является амплитудная модуляция, поэтому мы рассмотрим простой случай изменения амплитуды несущих колебаний по синусоидальному закону. Изменение амплитуды колебаний происходит по закону:

$$I_E = m I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (69)$$

и образует так называемую „огibaющую“*, а модулированные колебания будут выражаться уравнением

$$i = I_0 [1 + m \cos(\omega t - \varphi)] \cos \omega_0 t, \quad (70)$$

если выбрать начало отсчета для простоты так, чтобы φ_0 было равно нулю (или $n\pi$).

Изменения амплитуды происходит вокруг неизменной или средней амплитуды I_0 несущих колебаний, которая является постоянной составляющей, добавляющейся к огibaющей. Постоянная m , называемая „коэффициентом глубины моду-

* Более точное определение „огibaющей“ дано в § 67.

ляции**», равна отношению амплитуд огибающей и несущей (рис. 20,б).

Только в том случае, когда несущая частота ω_0 и частота модуляции ω находятся в гармоническом соотношении, модулированные колебания будут стационарными по отношению к огибающей. Если такого соотношения нет, то при наблюдении модулированных колебаний на осциллографе, частота развертки которого синхронизирована с частотой модуляции, изображение на экране не будет неподвижным и четким, хотя огибающая и будет неподвижна.

Прежде чем переходить к рассмотрению векторной диаграммы модулированных колебаний, представим уравнение (70) в виде суммы составляющих. Это уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$i = I_0 \cos \omega_0 t + (m I_0 / 2) \cos [(\omega_0 + \omega)t - \varphi] + (m I_0 / 2) \cos [(\omega_0 - \omega)t + \varphi]. \quad (71)$$

Отсюда видно, что модулированные колебания содержат составляющую несущей частоты ω_0 с амплитудой I_0 , составляющую частоты $(\omega_0 + \omega)$, называемую верхней боковой, и составляющую частоты $(\omega_0 - \omega)$, называемую нижней боковой частотой.

Симметричность частотного спектра относительно несущей частоты является важным свойством колебаний, модулированных по амплитуде. В предыдущих разделах рекомендовалось представлять частотные спектры в виде сопряженных составляющих, вследствие чего их форма автоматически получается симметричной относительно нулевой частоты. Однако, такие симметричные спектры не следует путать с частотными спектрами амплитудно-модулированных колебаний симметричных относительно частоты ω_0 , а не нулевой частоты.

Рассмотрим векторную диаграмму, представленную на рис. 20,а. Она построена обычным способом. Вектор I_0 , расположенный вдоль действительной оси $RO R'$, соответствует составляющей несущей частоты, а два вектора длиной $m I_0 / 2$ вращающиеся в противоположных направлениях с угловыми скоростями $\pm \omega$ вокруг конца вектора I_0 , соответствуют боковым частотам. Положение векторов в момент $t = 0$ дает амплитуду модулированных колебаний, а углы $\pm \varphi$ между осью $RO R'$ и векторами боковых составляющих — их фазовые углы. Если представить, что вся диаграмма вращается с угловой скоростью ω_0 , то проекции векторов на действительную

* Иногда также называется „глубиной модуляции“ и выражается в процентах от I_0 .

ось ROR' будут полностью представлять модулированные колебания. Однако, наглядно представить вращающиеся с различными скоростями векторы очень трудно, поэтому мы откажемся от этого представления, как это было сделано в § 13, и будем рассматривать векторную диаграмму в том виде, в каком она изображена на рис. 20,а. Скорость вращения векторов на этой диаграмме уменьшена на величину ω_0 . Векторы боковых составляющих вращаются со скоростями $\pm\omega$ и показаны на диаграмме в положении, занимаемом ими в момент $t=0$.

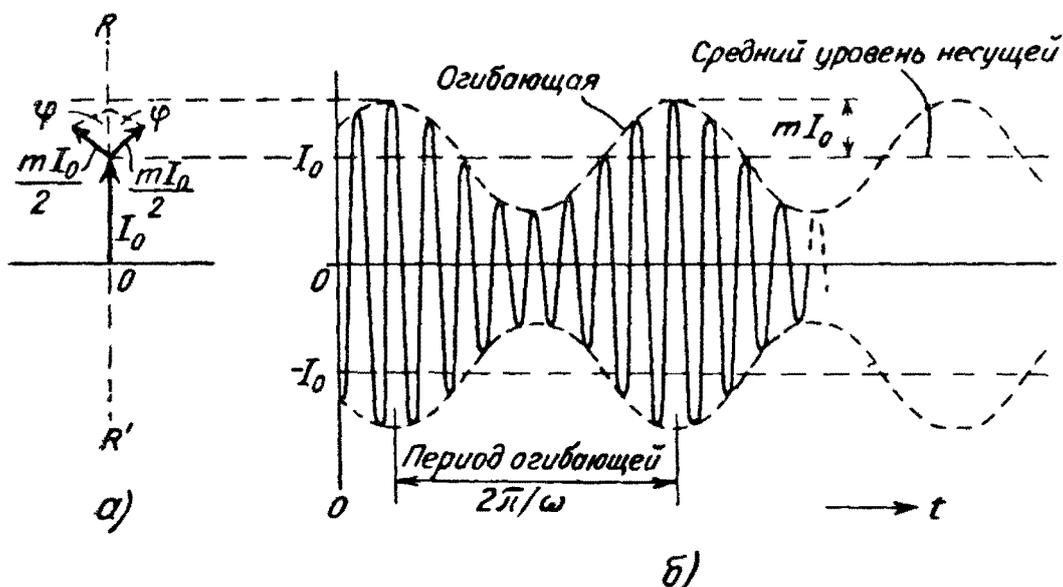


Рис. 20. Несущая частота, модулированная по амплитуде [уравнение (70)].
Уравнение огибающей— $mI_0 \cos(\omega t + \varphi)$, глубина модуляции m :
а) векторная диаграмма; б) несущая частота, модулированная по амплитуде по синусоидальному закону.

Проекции этих векторов на ось ROR' дают огибающую модулированных колебаний, которая согласно уравнению (70) равна

$$i_E = I_0[1 + m \cos(\omega t - \varphi)]. \quad (72)$$

Правильность этого выражения легко подтверждается рис. 20,а и б. Векторная диаграмма описывает огибающую модулированных колебаний любой несущей частоты, так как векторы боковых частот построены относительно неподвижного вектора несущей ω_0 .

В связи с этим возникает мысль о том, что можно привести несущую частоту к нулю и пользоваться векторной диаграммой, на которой представлены только боковые полосы. Это значительно упрощает рассмотрение колебаний, модулированных по амплитуде, так как огибающая по форме

гораздо проще, чем модулированная несущая. Все выводы которые будут сделаны относительно огибающей, например, об искажении ее формы, могут быть приложены к модулированным колебаниям любой несущей частоты.

Это очень важное положение и его следует рассмотреть подробнее.

16. Приведение несущей частоты к нулю

Рассмотрим вопрос о приведении несущей частоты к другим частотам, в том числе и к нулю, в спектре модулированных колебаний.

Простой спектр, согласно уравнению (71), состоит из трех составляющих, которые можно разложить на синусоидальные и косинусоидальные сопряженные составляющие и представить в виде соответствующих спектров, как это было сделано с уравнением (60) простого синусоидального колебания. В результате получится спектр, состоящий из трех косинусоидальных и трех синусоидальных составляющих с частотами ω_0 , $(\omega_0 + \omega)$ и $(\omega_0 - \omega)$ и сопряженный спектр составляющих с частотами $-\omega_0$, $-(\omega_0 + \omega)$ и $-(\omega_0 - \omega)$. Можно преобразовать уравнение (71) так, чтобы найти точное выражение для полного спектра. В результате должен получиться спектр, показанный на рис. 21,а. Но такое преобразование будет ненужным, если воспользоваться приведением несущей частоты к нулю.

Если написать выражения для косинусоидальных и синусоидальных составляющих векторов, представленных на рис. 20,а, на котором вектор несущей принято считать неподвижным, то получим:

$$i = I_0 + (mI_0/2) \cos \varphi \cos \omega t + (mI_0/2) \cos \varphi \cos (-\omega t) + (mI_0/2) \sin \varphi \sin \omega t - (mI_0/2) \sin \varphi \sin (-\omega t). \quad (73)$$

Эти составляющие можно сравнить с соответствующими составляющими простого синусоидального колебания, данными в уравнении (60). Суммирование их дает выражение (72) для огибающей i_E .

Уравнение (73) представлено на рис. 21,б в виде спектра, симметричного относительно нулевой частоты, аналогичного спектру простого синусоидального колебания (рис. 15,а и б). Необходимо сделать одно важное замечание: длины составляющих в спектре на рис. 21,б, когда несущая частота „приведена к нулю“, равны C и S , причем

$$\left. \begin{aligned} C &= (mI_0/2) \cos \varphi \\ S &= (mI_0/2) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

т. е. в два раза больше длины составляющих в полном спектре модулированных колебаний с несущей ω_0 (рис. 21,а).

Очевидно, это правило можно распространить на случай модулированных колебаний, имеющих огибающую более сложной формы.

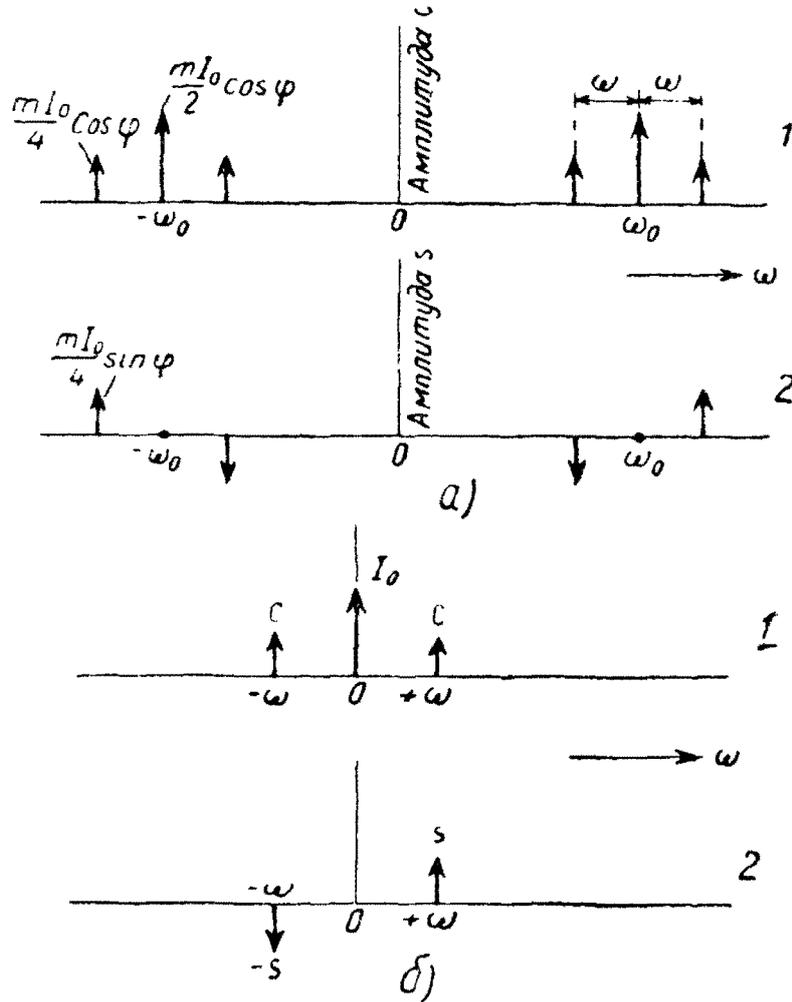


Рис. 21. Принцип приведения несущей частоты к нулю:
 а) полный сопряженный спектр колебаний, модулированных по амплитуде по синусоидальному закону:
 1 — косинусные составляющие, 2 — синусные составляющие; б) тот же спектр, приведенный к нулю. Спектр соответствует спектру огибающей; 1 — косинусные составляющие; 2 — синусные составляющие.

Возьмем для примера периодическую кривую с постоянной составляющей, показанную на рис. 19,а. Предположим, что эта кривая получена в результате суммирования гармонических составляющих ряда Фурье [уравнение (64)] с определенными амплитудами $I_1, I_2, I_3 \dots$ и фазами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ и т. д. Тогда несущие колебания, модулированные колебаниями, изменяющимися по закону этой кривой, выразятся как

$$i = I_0 [1 + m_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + m_2 \cos(2\omega_1 t - \varphi_2) + \dots] \cos \omega_0 t, \quad (75)$$

если положить

$$I_1 = m_1 I_0, \quad I_2 = m_2 I_0, \quad \text{и т. д.} \quad (76)$$

Уравнение модулированных колебаний (75) можно представить в виде суммы несущей и боковых частот

$$\begin{aligned} i = & I_0 \cos \omega_0 t + \frac{m_1 I_0}{2} \cos [(\omega_0 + \omega_1)t - \varphi_1] + \\ & + \frac{m_2 I_0}{2} \cos [(\omega_0 + 2\omega_1)t - \varphi_2] + \frac{m_1 I_0}{2} \cos [(\omega_0 - \omega_1)t + \varphi_1] + \\ & + \frac{m_2 I_0}{2} \cos [(\omega_0 - 2\omega_1)t + \varphi_2] + \dots \end{aligned} \quad (77)$$

Эта сумма состоит из несущей (с угловой частотой ω_0) и ряда из пар боковых частот, расположенных симметрично относительно несущей, при чем каждой синусоидальной составляющей огибающей соответствует пара боковых частот.

Спектр частот таких колебаний аналогичен спектру колебаний, модулированных по синусоидальному закону (рис. 21), с той лишь разницей, что в нем несколько пар боковых составляющих. Каждый член уравнения (77) может быть разложен на косинусоидальную и синусоидальную составляющие, например,

$$\begin{aligned} (m_1 I_0 / 2) \cos [(\omega_0 + \omega_1)t - \varphi_1] = & (m_1 I_0 / 2) \cos \varphi_1 \cos (\omega_0 + \omega_1)t + \\ & + (m_1 I_0 / 2) \sin \varphi_1 \sin (\omega_0 + \omega_1)t, \end{aligned} \quad (78)$$

и спектр может быть представлен в виде групп сопряженных составляющих, как и прежде (например, рис. 21,а).

Можно применить принцип приведения несущей частоты к нулю, дающий существенные упрощения. В результате получится спектр, показанный на рис. 18,б, с составляющей несущей частоты ω_0 в центре (сопряженные составляющие, симметричные относительно частоты $-\omega_0$, на рисунке не показаны) и спектр рис. 18,а с несущей частотой, приведенной к нулю. Но такой спектр, как уже отмечалось, является спектром огибающей. Таким образом, спектр модулированных колебаний идентичен со спектром их огибающей, с той лишь разницей, что ось симметрии будет не на нулевой, а на несущей частоте ω_0 . Ясно, что этот принцип справедлив для огибающей любой формы, так как он может быть применен к любой паре боковых частот спектра модулированных колебаний.

17. Несущие колебания, модулированные по частоте и фазе. Некоторые определения и различия

Необходимо хотя бы вкратце рассмотреть характеристики и формы колебаний, модулированных по частоте или фазе, так как эти виды модуляции начинают получать широкое распространение за последние годы.

Из общего выражения незатухающих колебаний (68) следует, что модуляция может быть осуществлена путем изменения в соответствии с подлежащим передаче сигналом несущей частоты ω_0 или фазового угла φ_0 . Амплитуда несущих колебаний I_E остается при этом неизменной, и колебания будут иметь вид, представленный на рис. 22,б. По внешнему виду этого графика невозможно отличить частотную модуляцию от фазовой (за исключением некоторых специальных случаев, как будет показано ниже).

Такие колебания могут быть представлены вращающимся вектором постоянной длины I_E (рис. 22,а), однако, скорость вращения этого вектора ω не должна оставаться постоянной, так как иначе он будет представлять простые незатухающие колебания (рис. 11). Обычно в системах связи средняя несущая частота ω_0 отклоняется при частотной модуляции в обе стороны в некоторых пределах.

Для более четкого выяснения различия между частотной и фазовой модуляцией, рассмотрим простой случай передачи сигнала

$$e = E_m \cos \omega_m t, \quad (79)$$

при обоих видах модуляции.

При частотной модуляции угловая скорость вращения вектора I_E (рис. 22,а) должна изменяться по закону

$$\omega' = \omega_0(1 + k \cos \omega_m t), \quad (80)$$

где $k\omega_0$ — частотное отклонение, т. е. изменение несущей частоты, соответствующее амплитуде сигнала E_m . Величина ω' называется мгновенным значением частоты модулированных колебаний.

Изменение несущей частоты по такому закону можно осуществить, например, изменением емкости колебательного контура генератора с помощью специального лампового модулятора так, чтобы частота настройки генератора изменялась в соответствии с напряжением сигнала, поданного на сетку модуляторной лампы. Детальное рассмотрение методов модуляции не входит в задачи этой книги. Интересующиеся читатели могут найти нужные сведения в посвященной этим вопросам литературе.

Если вектор I_E вращается с угловой скоростью ω' и θ — угол между вектором и осью ROR' , то

$$\omega' = d\theta/dt, \quad (81)$$

и проекция вектора на ось ROR' может быть представлена в виде

$$i = I_E \cos \theta. \quad (82)$$

Тогда выражение для модулированных по частоте колебаний будет иметь вид:

$$i = I_E \cos [\omega_0 t + (k\omega_0/\omega_m) \sin \omega_m t]. \quad (83)$$

Коэффициент $k\omega_0/\omega_m$, равный отношению частотного отклонения к модулирующей частоте, называется „коэффициентом частотного отклонения“.

Перейдем к фазовой модуляции. Предположим, что в нашем распоряжении имеются средства, позволяющие изменять фазовый угол φ_0 незатухающих колебаний (68) в соответствии с изменениями сигнала $e = E_m \cos \omega_m t$. Обозначим амплитудное отклонение фазы, называемое „фазовым отклонением“ и соответствующее амплитуде модулирующего сигнала E_m через $k'\varphi_0$. Тогда выражение для модулированных по фазе колебаний будет иметь вид

$$i = I_E \cos (\omega_0 t + k'\varphi_0 \cos \omega_m t), \quad (84)$$

так как фазовый угол θ в этом случае равен $\omega_0 t$ плюс изменение фазы высокочастотных колебаний.

Из сравнения выражений (83) и (84) видно, что в обоих случаях модулированные колебания имеют некоторую сред-

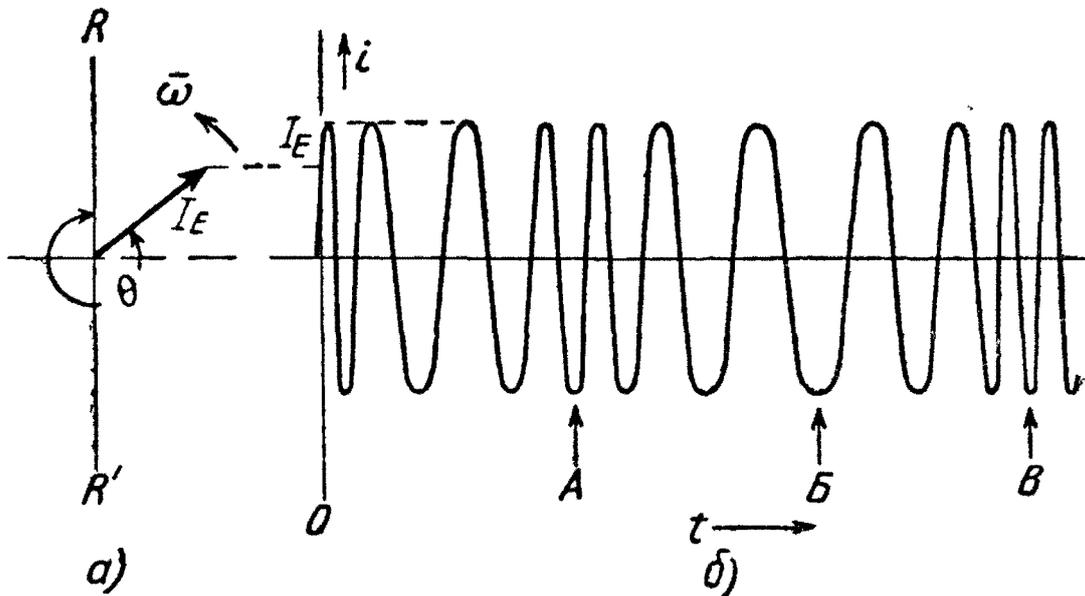


Рис. 22. Диаграмма колебаний, модулированных по частоте или по фазе: а — векторная диаграмма; б — кривая частотно- или фазово-модулированных колебаний.

ную угловую частоту ω_0 и фазовый угол, изменяющийся в зависимости от силы модулирующего сигнала. Таким образом, можно считать, что при частотной и фазовой модуляции модулированные колебания имеют одинаковую форму. Это поясняется диаграммой рис. 22. Частота колебаний в точке A выше, чем в точке B , а в точке B она снова такая же, как в точке A . Но фаза по отношению немодулированных колебаний в точке C может отличаться от фазы в точке A .

Таким образом мы можем рассматривать эти колебания как частотно-модулированные, так как частота изменяется от некоторого значения в точке A к минимальному значению в точке B и от него снова к тому же значению в точке B . С другой стороны, их можно рассматривать как модулированные по фазе на участке от A до B , при чем в процессе фазовой модуляции частота колебаний должна обязательно изменяться.

18. Векторные диаграммы установившихся процессов при частотной и фазовой модуляции

Модулированные по частоте и фазе колебания имеют постоянную амплитуду, однако, по форме они не являются строго синусоидальными. Они могут быть разложены на синусоидальные боковые частоты. Спектр боковых частот будет зависеть в каждом отдельном случае от формы модулированных колебаний, при чем можно показать, что число составляющих спектра всегда будет равно бесконечности. Форму частотного спектра можно представить себе яснее из рассмотрения векторной диаграммы, которая может быть построена так же, как для колебаний, модулированных по амплитуде.

На рис. 20,а приведена векторная диаграмма для колебаний, модулированных по амплитуде (с синусоидальной огибающей) с неподвижным вектором I_0 несущей, так как несущая частота „приведена“ к нулевой. Два вектора, соответствующие боковым частотам, вращаются с частотой модуляции в противоположных направлениях вокруг конца вектора несущей. Если теперь повернуть эти два вектора на 90° , как на рис. 23,а, то получится диаграмма, приблизительно соответствующая частотной или фазовой модуляции. Неподвижный вектор OP представляет составляющую несущей частоты ω_0 , а векторы PQ и PQ' , вращающиеся вокруг точки P в противоположных направлениях — боковые частоты. Сложение этих векторов дает результирующий вектор, качаю-

щийся вокруг центрального положения, как показано на рис. 23,б. Диаграмма представляет колебания, модулированные по частоте или фазе, с несущей частотой ω_0 , с тем только отличием, что длина результирующего вектора изменяется: от OA до OA' . Это изменение длины может быть частично скорректировано добавлением пары векторов QN и $Q'N'$, симметричных относительно оси ROR' (рис. 23,в). Ясно, что для точного представления колебаний, модулированных по частоте или фазе, необходимо бесконечное число таких пар векторов, представляющих боковые частоты.

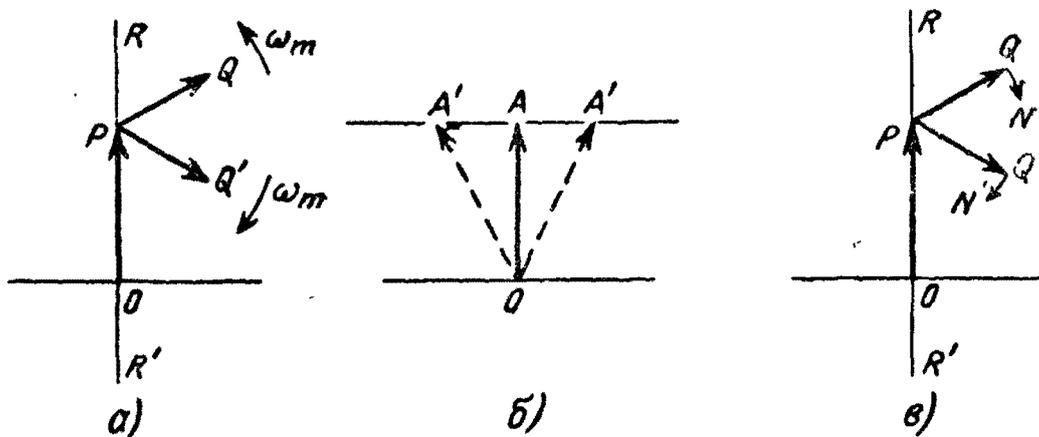


Рис. 23. Колебания, модулированные по частоте и по фазе. Векторы несущей и боковых частот.

Если коэффициент модуляции мал, тогда вектор OA (рис. 23,б) будет отклоняться только на небольшой угол, и изменение его по длине от OA до OA' будет незначительным. Если не требуется точного приближения к форме колебаний, то может быть взято меньшее число пар составляющих.

19. Спектры колебаний, модулированных по частоте и фазе

Точное вычисление длин векторов OP , PQ , QN и т. д. в общем случае является чисто математической трудоемкой задачей. Здесь будет дано лишь общее представление о применяемом методе. Практически в большинстве случаев бывает достаточно знать лишь общий вид спектра, а точное вычисление требуется очень редко.

К сожалению, для этих случаев модуляции нельзя применить принцип приведения несущей частоты к нулю, как это делалось в § 16 при амплитудной модуляции. Спектр модулированных колебаний не связан такими простыми соотно-

шениями со спектром модулирующих колебаний, которые позволили бы сделать это.

Колебания, модулированные по фазе [уравнение (84)] могут быть разделены на две ортогональные составляющие, так как они имеют форму $\cos(x + y)$.

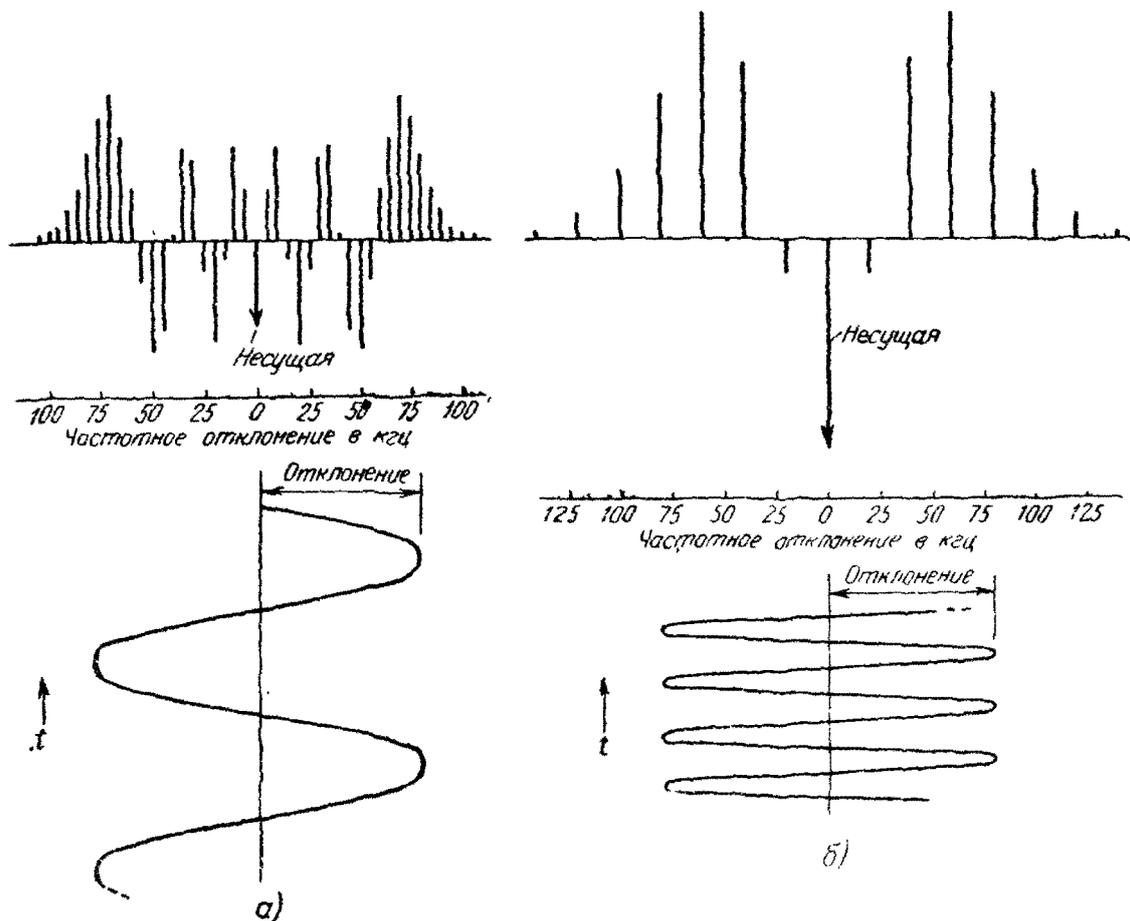


Рис. 24. Спектры частотно-модулированных колебаний при различных коэффициентах частотного отклонения:

- а) $\frac{k\omega_0}{\omega_m} = 16$ (например, частотное отклонение 80 кГц, модулирующая частота 5 кГц)
 б) $\frac{k\omega_0}{\omega_m} = 4$ (например, частотное отклонение 80 кГц, модулирующая частота 20 кГц).

Косинусоидальная составляющая (синфазная) имеет амплитуду

$$C = I_E \cos(k' \varphi_0 \cos \omega_m t), \quad (85)$$

а синусоидальная составляющая, находящаяся в квадратуре, амплитуду

$$S = -I_E \sin(k' \varphi_0 \cos \omega_m t). \quad (86)$$

Аналогичное выражение можно найти для колебаний, модулированных по частоте [уравнение (83)].

В эти выражения входят косинус от косинуса и синус от косинуса (функции Бесселя) и они могут быть разложены в бесконечные ряды. Для большинства конкретных примеров значения функций Бесселя могут быть найдены в таблицах. Эти значения будут соответствовать амплитудам боковых частот, располагающихся симметрично относительно несущей частоты ω_0 на расстояниях, соответствующих модулирующей частоте и всем ее гармоникам.

В случае модуляции напряжением сложной формы, боковые частоты будут располагаться относительно несущей на расстояниях, соответствующих модулирующим частотам ω_n , ω_m , $\omega_1 \dots$ и т. д. и их гармоникам, и в спектре появятся также составляющие суммарных и разностных частот $\omega_n \pm \omega_m$, $\omega_n \pm \omega_m \pm \omega_1 \dots$ и т. д., вследствие чего спектр оказывается очень сложным.

Примеры спектров колебаний, модулированных по частоте по синусоидальному закону, приведены на рис. 24,а — для $k\omega_0/\omega_m = 16$ и на рис. 24,б для $k\omega_0/\omega_m = 4$. Следует отметить общие особенности этих спектров: боковые частоты располагаются через интервалы, равные модулирующей частоте $\omega_m/2\pi$ и при $k\omega_0/\omega_m = 16$ больше составляющих противоположных знаков. Другим важным обстоятельством является то, что спектры выходят за пределы частотного отклонения, при чем занимаемый спектром участок, как и следовало ожидать, тем шире, чем выше частота модуляции. Очевидно, что если несущие колебания модулируются по частоте очень медленно, то за пределами частотного отклонения не должно быть составляющих с заметными амплитудами.

Одна важная особенность спектров колебаний, модулированных по частоте или фазе, устанавливает их общность со спектром колебаний, модулированных по амплитуде, хотя, как указывалось ранее, они не одинаковы. Формы этих спектров не зависят от значений несущей частоты, если коэффициент модуляции постоянный.

20. Разложение периодических кривых в ряд Фурье

В предыдущих параграфах рассматривался вопрос о сложении синусоидальных составляющих различных частот и было показано, что если между амплитудами и фазами отдельных составляющих существуют определенные соотношения, то могут получаться характерные формы кривых. В частности, в § 14 было показано, что сложение ряда

гармонических составляющих дает периодическую несинусоидальную кривую.

Значительный интерес представляет обратная операция: определение амплитуды и фазы синусоидальных составляющих, если известна форма результирующей кривой.

В качестве примера на рис. 25,а изображена кривая „прямоугольных колебаний“, применяемая обычно в расчетах переходных процессов и для испытания схем, представляющая э. д. с., знак которой изменяется через определенные

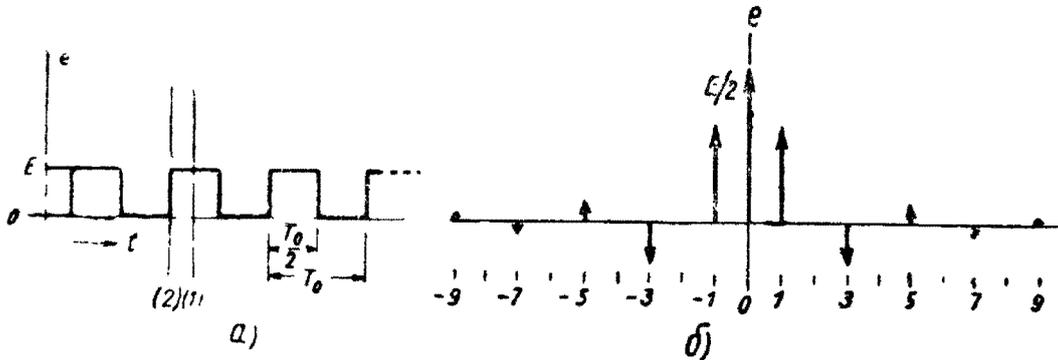


Рис. 25. Кривая и сопряженный спектр прямоугольных колебаний: а) начало отсчета при разложении в спектр было выбрано в точке 1; б) спектр прямоугольных колебаний (только косинусные составляющие).

промежутки времени $T_1 = T_0/2$. Эта кривая периодическая и, следовательно, можно предположить, что она может быть представлена в виде суммы гармонических косинусоидальных или синусоидальных составляющих или одновременно тех и других. Пусть эта сумма имеет вид

$$e = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n \cdot t}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T_0}, \quad (87)$$

где a_0 — постоянная составляющая, a_n и b_n — неизвестные амплитуды гармонических составляющих. Этот ряд аналогичен гармоническому ряду, представленному уравнением (64)*. Отметим, что основная угловая частота ω_1 написана здесь в виде $2\pi/T_0$, т. е. выражена через основной период T_0 [см. уравнение (66)].

Путем правильного выбора начала отсчета времени этот ряд (87) может быть упрощен. Если начало отсчета находится в точке (1), кривая (рис. 25,а) симметрична от-

* Эти уравнения представляют две тригонометрические формы ряда Фурье. Уравнение (64) дает амплитуды и фазы гармоник, а уравнение (87) косинусоидальные и синусоидальные составляющие. Соотношения между ними определяются уравнением (63).

носителем $t=0$ и для представления ее нужны только косинусоидальные составляющие. Так как косинусоида $A \cos \omega t$ симметрична относительно $t=0$, то, следовательно, сумма любого числа косинусоид будет также симметричной. Если же начало взято в точке (2), то кривая может быть представлена только синусоидальными составляющими, так как она обладает симметрией 2-го рода относительно $t=0$. Таким образом, прежде чем практически приступать к разложению кривой в ряд Фурье, необходимо тщательно выбрать начало отсчета времени во избежание излишней работы.

Для рассматриваемого примера выберем начало в точке (1), так что все амплитуды b_n синусоидальных составляющих будут равны нулю. Амплитуды a_n косинусоидальных составляющих определяются следующим образом. Умножим обе части (87) на $\cos 2\pi r t/T_0$, где r может принимать последовательно значения 1, 2, 3 . . . и т. д. и затем возьмем интеграл от произведения по всему периоду T_0 . Чтобы сделать этот процесс более ясным, запишем э.д.с. e как $f(t)$. Тогда после подстановки $n=1, 2, 3 . . .$ и т. д.

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cos(2\pi r t/T_0) dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} [a_0 \cos(2\pi r t/T_0) + a_1 \cos(2\pi t/T_0) \cos(2\pi r t/T_0) + a_2 \cos(4\pi t/T_0) \cos(2\pi r t/T_0) + . . .] dt. \quad (88)$$

Теперь можно, давая r значения 1, 2, 3 и т. д., выполнить интегрирование. Однако можно показать, что все интегралы в правой части обращаются в нуль за исключением одного, для которого $r=n$, т. е. той гармонике, частота которой равна частоте, стоящей под знаком косинуса множителя $\cos(2\pi r t/T_0)$. Одним из примеров такого интегрирования является мощность синусоидального переменного тока i , создаваемого синусоидальной э.д.с. e , которая равна постоянной (ei) только в случае равных частот. В рассматриваемом случае мы умножаем ряд гармонических синусоидальных составляющих на синусоидальную функцию, частота которой может меняться степенями таким образом, что она становится последовательно равной частотам различных гармонических составляющих ряда. После этого выполняется интегрирование произведения аналогично тому, как это делается при определении мощности переменного тока. Интеграл от произведения двух функций: одной — сложного

вида $f(t)$ и другой — синусоидальной, равен интегралу от синусоидальных функций с равными частотами.

Математически все сказанное выражается так:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a_0 \cos(2\pi r t / T_0) dt = 0;$$

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a_n \cos(2\pi n t / T_0) \cos(2\pi r t / T_0) dt = 0. \quad (89)$$

Следует также заметить, что

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} b_n \sin(2\pi n t / T_0) \sin(2\pi r t / T_0) dt = 0,$$

для всех случаев, кроме $r = n$, когда интегралы равны $a_n T_0/2$ или $b_n T_0/2$ соответственно.

Всегда равен нулю также интеграл

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} a_n \cos(2\pi n t / T_0) \sin(2\pi r t / T_0) dt = 0. \quad (90)$$

Равенство (90) сохраняется, если n и r поменять местами, так как это целые числа.

В рассматриваемом примере для прямоугольной кривой (рис. 25,а) с началом координат в точке (1)

$$f(t) = E \text{ на участке от } t = -T_0/4 \text{ до } +T_0/4$$

и

$$f(t) = 0 \text{ на участке от } t = -T_0/2 \text{ до } -T_0/4 \\ \text{и от } +T_0/4 \text{ до } +T_0/2.$$

Уравнение (88) после подстановки в него этих значений $f(t)$ приобретает вид

$$\int_{-T_0/4}^{+T_0/4} E \cos(2\pi n t / T_0) dt = a_n T_0/2, \quad (91)$$

так как все остальные члены обращаются в нуль.

Выполняя интегрирование, получим

$$(2E/n\pi) \sin(n\pi/2) = a_n, \quad (92)$$

что при подстановке $n=1, 2, 3 \dots$ дает значения $a_1, a_2, a_3 \dots$ и т. д. Множитель $\sin(n\pi/2)$ равен нулю при четном n и единице при нечетном n .

Полученный спектр представлен на рис. 25,б. Как видно, он состоит из ряда гармоник, чередующихся по знаку, расположенных на произвольной оси абсцисс n . При $n=2, 4, 8 \dots$ и т. д. гармоники равны нулю, т. е. спектр состоит только из нечетных гармоник. Спектр представлен в виде сопряженных косинусоидальных составляющих (см. § 13).

Если выбрать начало отсчета в точке (2), то амплитуды косинусоидальных членов ряда a_n будут все равны нулю и по способу, аналогичному разобранному выше, можно найти амплитуды b_n синусоидальных членов ряда. Так, умножение на $\sin 2\pi nt/T_0$ и интегрирование по всему периоду T_0 даст следующее уравнение:

$$\int_0^{+T_0/2} E \sin(2\pi n/T_0)t dt = b_n(T_0/2) \quad (93)$$

для амплитуд b_n , аналогичное (91).

Мы не нашли до сих пор значение постоянной составляющей a_0 . Рассматриваемое прямоугольное колебание безусловно содержит постоянную составляющую, так как она не имеет отрицательных значений. Постоянная составляющая a_0 является средним значением кривой и может быть найдена таким же способом, каким определяется средняя ордината любого графика, т. е. делением площади, ограниченной кривой, на ее основание. Так как кривая периодическая, то достаточно взять интеграл за период. Постоянная составляющая (или среднее значение a_0) в общем случае равна

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) dt. \quad (94)$$

Для прямоугольного колебания (рис. 25,а) $a_0 = E/2$. Постоянную составляющую можно рассматривать как амплитуду косинусоидального члена нулевой частоты, так как

$$a_0 \cos(0) = a_0. \quad (95)$$

На спектре удобно изображать эту составляющую в виде нулевой гармоники, т. е. в точке $n=0$, как это сделано на рис. 25,б.

Таким образом, сложная периодическая функция $f(t)$ может быть представлена в виде гармонического ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \begin{matrix} a_n \cos \\ b_n \sin \end{matrix} \right\} \frac{2\pi nt}{T_0}, \quad (96)$$

коэффициенты a_n и b_n которого определяются как

$$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \frac{2\pi nt}{T_0} dt. \quad (97)$$

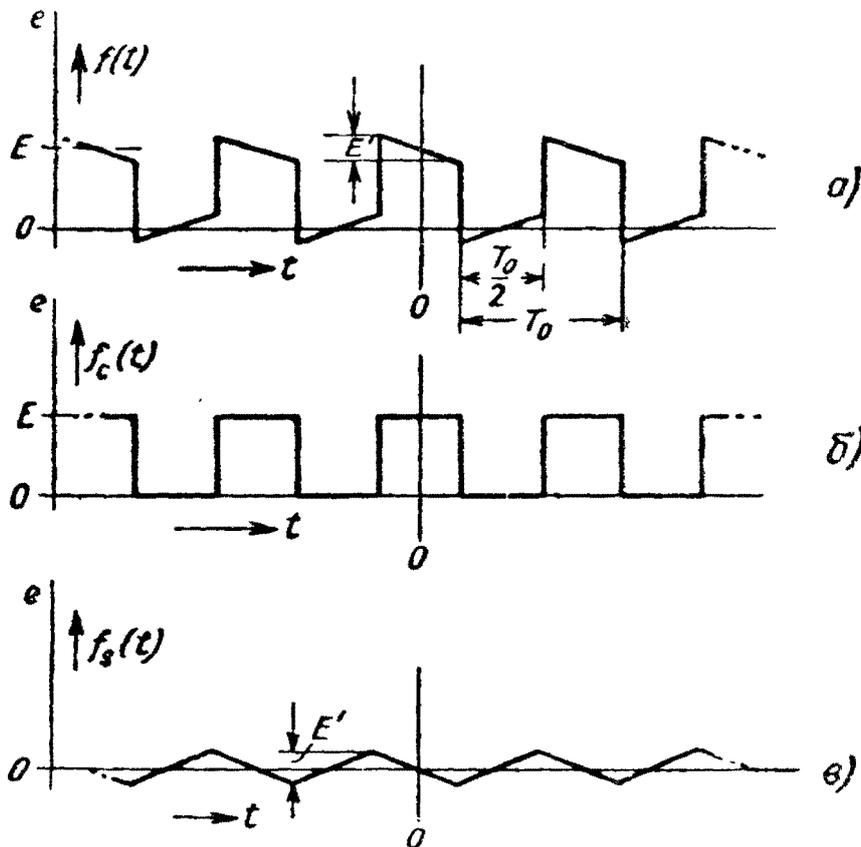


Рис. 26. Разложение асимметричных колебаний на четную и нечетную составляющие:
 а) асимметричные колебания; б) четная симметричная составляющая (симметрия 1-рода); в) нечетная составляющая (симметрия 2 рода).

Выбором начала отсчета времени определяется, будет ли ряд содержать только косинусоидальные или только синусоидальные члены, или те и другие одновременно.

Если подлежащая разложению кривая $f(t)$ асимметрична относительно выбранного начала отсчета, как например, представленная на рис. 26, а, то должны быть найдены синусоидальные и косинусоидальные гармонические составляющие

щие ряда (87). Одни косинусоидальные составляющие будут представлять четную или симметричную функцию $f_c(t)$, а синусоидальные — нечетную функцию или функцию, обладающую симметрией 2 рода, $f_s(t)$. При желании кривую можно сначала разложить на эти две части. Такое разложение показано на рис. 26, б и в. Эти составляющие всегда можно найти для любого практического случая, для чего нужно сначала вычертить кривую $f(t)$ нормально, а затем в обратном порядке, (с обращенной осью времени), т. е. в виде $f(-t)$. Четная составляющая получится путем сложения соответствующих ординат, т. е. как $f_c(t) = f(t) + f(-t)$, а нечетная составляющая — путем вычитания соответствующих ординат, т. е. как $f_s(t) = f(t) - f(-t)$ *.

Каждая сумма ряда может быть найдена отдельно путем умножения $f_c(t)$ на $\cos 2\pi nt/T_0$, а $f_s(t)$ на $\sin 2\pi nt/T_0$ и интегрирования по периоду T_0 . Конечно, точно такой же результат получится при умножении выражения для всей кривой $f(t)$ на косинусоидальную и синусоидальную функции в отдельности и последующем интегрировании.

Спектры косинусоидальных и синусоидальных составляющих могут быть представлены отдельно, как на рис. 18, а.

Если применяются сопряженные составляющие, то спектр косинусоидальных составляющих будет симметричным, а спектр синусоидальных составляющих — обладать симметрией 2 рода относительно нулевой частоты, так как

$$\left. \begin{aligned} a_n \cos \frac{2\pi nt}{T_0} &= \frac{a_n}{2} \cos \frac{2\pi nt}{T_0} + \frac{a_n}{2} \cos \left(-\frac{2\pi nt}{T_0} \right) \\ \text{и} \\ b_n \sin \frac{2\pi nt}{T_0} &= \frac{b_n}{2} \sin \frac{2\pi nt}{T_0} - \frac{b_n}{2} \sin \left(-\frac{2\pi nt}{T_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Следует отметить еще два вида записи разложения не-синусоидальной функции в ряд Фурье, представленный уравнением (96). Во-первых, ортогональные составляющие одинаковой частоты можно сгруппировать следующим образом

$$a_n \cos \frac{2\pi nt}{T_0} + b_n \sin \left(\frac{2\pi nt}{T_0} \right) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos \frac{2\pi nt}{T_0} - \varphi_n, \quad (99)$$

где $\varphi_n = \text{arctg} (b_n/a_n)$. Спектр может быть представлен в виде амплитуд составляющих $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и фазовых углов φ_n .

* Для получения правильного масштаба нужно взять полусумму и полуразность. *Прим. ред.*

Во-вторых, может быть применена комплексная форма записи, как это было показано в § 10. Можно написать

$$\left. \begin{aligned} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T_0} &= \frac{a_n}{2} (e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t}) \\ b_n \sin \frac{2\pi n t}{T_0} &= \frac{a_n}{2} (e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}) \end{aligned} \right\}, \quad (100)$$

где $\omega_n = 2\pi n / T_0$.

Гармонические составляющие частоты ω_n могут быть представлены векторной диаграммой рис. 13, если положить $C = a_n / 2$ и $S = b_n / 2$. Сопряженные векторы в этом случае будут $\frac{1}{2} (a_n + j b_n)$ и $\frac{1}{2} (a_n - j b_n)$.

Из уравнения (100) n -ную составляющую можно выразить как:

$$\begin{aligned} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) &= \\ &= \left(\frac{a_n + j b_n}{2} \right) e^{-j\omega_n t} + \left(\frac{a_n - j b_n}{2} \right) e^{+j\omega_n t} = \end{aligned} \quad (101)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (e^{+j\varphi_n} e^{-j\omega_n t} + e^{-j\varphi_n} e^{+j\omega_n t}), \quad (102)$$

где φ_n определяется так же, как в уравнении (99).

Правую часть уравнения можно переписать в более удобной форме в виде одного члена

$$\frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} e^{-j\varphi_n} e^{j\omega_n t}, \quad (103)$$

если n придавать значения как положительных, так и отрицательных целых чисел. Тогда весь ряд (96) для $f(t)$ можно представить в виде

$$e = f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{j\omega_n t}, \quad (104)$$

где a_n — комплексная амплитуда. Постоянная составляющая получается при $n = 0$.

Выражение для комплексной амплитуды a_n имеет вид

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} e^{-j\varphi_n} = \frac{a_n - j b_n}{2} = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt, \end{aligned} \quad (105)$$

как это следует из уравнения (97), определяющего a_n и b_n . Здесь n опять может принимать положительные и отрицательные целые значения.

Уравнения (104) и (105) полезно сравнить с тригонометрической формой уравнений (96) и (97).

До сих пор рассматривались только такие периодические функции, для которых известно их аналитическое выражение. Однако можно определить гармонические составляющие функций, представленных графически, если их аналитическое выражение неизвестно. Такое разложение основано на измерении ординат кривой, разделенных определенными промежутками, и является приближенным, хотя и может быть выполнено с любой степенью точности. При этом нельзя вычислить точно интегралы вида (97) или (105), но необходимо применить графическое интегрирование. Имеется также большое количество оптических, электрических и механических приборов для разложения кривых в ряд Фурье.

21. Частотные спектры импульсов и одиночных возмущений. Интеграл Фурье

Часто бывает необходимо определить частотный спектр кривой импульсного типа, т. е. имеющей определенное конечное значение только для малого по сравнению с периодом повторения отрезка времени (см., например, рис. 28,в). Если период повторения увеличивается до бесконечно большого значения, импульс становится одиночным, изолированным (рис. 28,г). Такой импульс должен начинаться в некоторый определенный момент времени, но спадать до нуля он может теоретически в течение неопределенно длительного времени, хотя практически можно считать, что через определенный отрезок времени T_1 , называемый длительностью импульса, его значение становится равным нулю.

Разложение таких повторяющихся или одиночных импульсов логически вытекает из разложения периодических кривых в ряд Фурье. В случае одиночного импульса „период повторения“ равен бесконечности, а основная частота спектра Фурье равна нулю. Гармонические составляющие будут гармониками „нулевой частоты“, что означает, что спектр состоит из линий, прилегающих одна к другой по оси частот бесконечно близко так, что получается непрерывный спектр. Для любой частоты от нуля до бесконечности в спектре окажется синусоидальная составляющая, если только специальная форма импульса не требует наличия разрывов в спектре.

Из того, что энергия одиночного импульса должна быть конечной, следует, что все составляющие спектра должны быть бесконечно малыми, хотя отношения отдельных амплитуд имеют конечные значения.

На рис. 27 показано несколько импульсов различной формы с одинаковым периодом повторения T_0 и длительностью T_1 . Отношение $\frac{T_0}{T_1}$ обозначается буквой K (оно обычно называется скважностью следования импульсов, а обратная величина $\frac{T_1}{T_0}$ — коэффициентом заполнения). Приведены также аналитические выражения для каждого импульса и для амплитуд a_n , составляющих спектра. Ввиду симметричности всех этих импульсов относительно $t=0$, в спектре будут присутствовать только косинусоидальные составляющие, так что $b_n=0$ и $f(t)=f_c(t)$, так как $f_s(t)=0$.

Возьмем для примера первый из этих импульсов — косинусоидальный импульс, определяемый выражением $e=f(t)=E \cos \frac{\pi t}{T_1}$ на участке от $-\frac{T_1}{2}$ до $+\frac{T_1}{2}$. Подстановка этого выражения в (97) для определения амплитуды n -ой гармоники основной частоты $\frac{1}{T_0}$ дает

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} E \cos \frac{\pi t}{T_1} \cos \frac{2\pi n t}{T_0} dt. \quad (106)$$

Решение этого интеграла дает a_n , но как будет показано дальше, гораздо проще рассматривать величину $a_n K$.

Для данного примера

$$a_n K = \frac{4E}{\pi} \frac{\cos \frac{n\pi}{K}}{1 - 4n^2/K^2}. \quad (107)$$

Как видно, это выражение является функцией $\frac{n}{K}$, а не n и K отдельно. Читатель может установить, что это справедливо и для остальных импульсов, приведенных на рис. 27, и что для любого импульса, имеющего конечное отношение $\frac{T_0}{T_1} = K$, амплитуда гармоник может быть выражена в виде

$$a_n K = f\left(\frac{n}{K}\right). \quad (108)$$

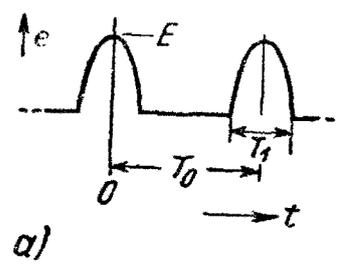
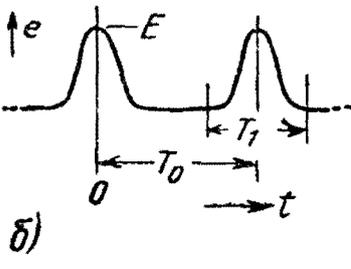
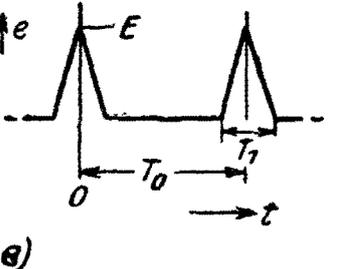
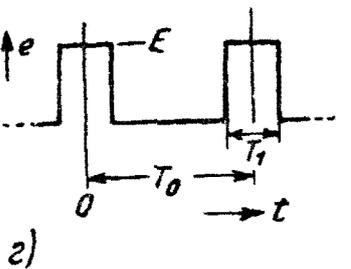
Форма кривой	Уравнение кривой	Амплитуда n -ой гармоники
	$e = E \cos \frac{\pi t}{T_1}$ $\left(-\frac{T_1}{2} < t < +\frac{T_1}{2}\right)$	$a_n K = \frac{4E \cos \frac{n\pi}{K}}{\pi (1 - K^2)}$
	$e = E \cos \frac{2\pi t}{T_1}$ $\left(-\frac{T_1}{2} < t < +\frac{T_1}{2}\right)$	$a_n K = \frac{E \cdot K}{\pi \cdot n} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{K}}{\left(1 - \frac{n^2}{K^2}\right)}$
	$e = E \left(1 + \frac{2t}{T_1}\right)$ для $-T_1/2 < t < 0$ $e = E \left(1 - \frac{2t}{T_1}\right)$ для $0 < t < T_1/2$	$a_n K = \frac{2E \cdot K^2}{\pi^2 \cdot n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{K}\right)$
	$e = E$ $\left(-\frac{T_1}{2} < t < +\frac{T_1}{2}\right)$	$a_n K = \frac{2E \cdot K}{\pi \cdot n} \sin \frac{n\pi}{K}$

Рис. 27. Импульсы различной формы, их уравнения и выражения для амплитуды n -ой гармоники ($K = T_0/T_1$; T_0 — период повторения):
 а) полукосинусоидные импульсы; б) квадратично-косинусные импульсы; в) треугольные импульсы; г) прямоугольные импульсы.

Спектр импульса может быть представлен в виде составляющих по оси $\frac{n}{K}$, а не по оси n , так что он может быть применен к импульсу данной формы с любым отношением $K = \frac{T_0}{T_1}$.

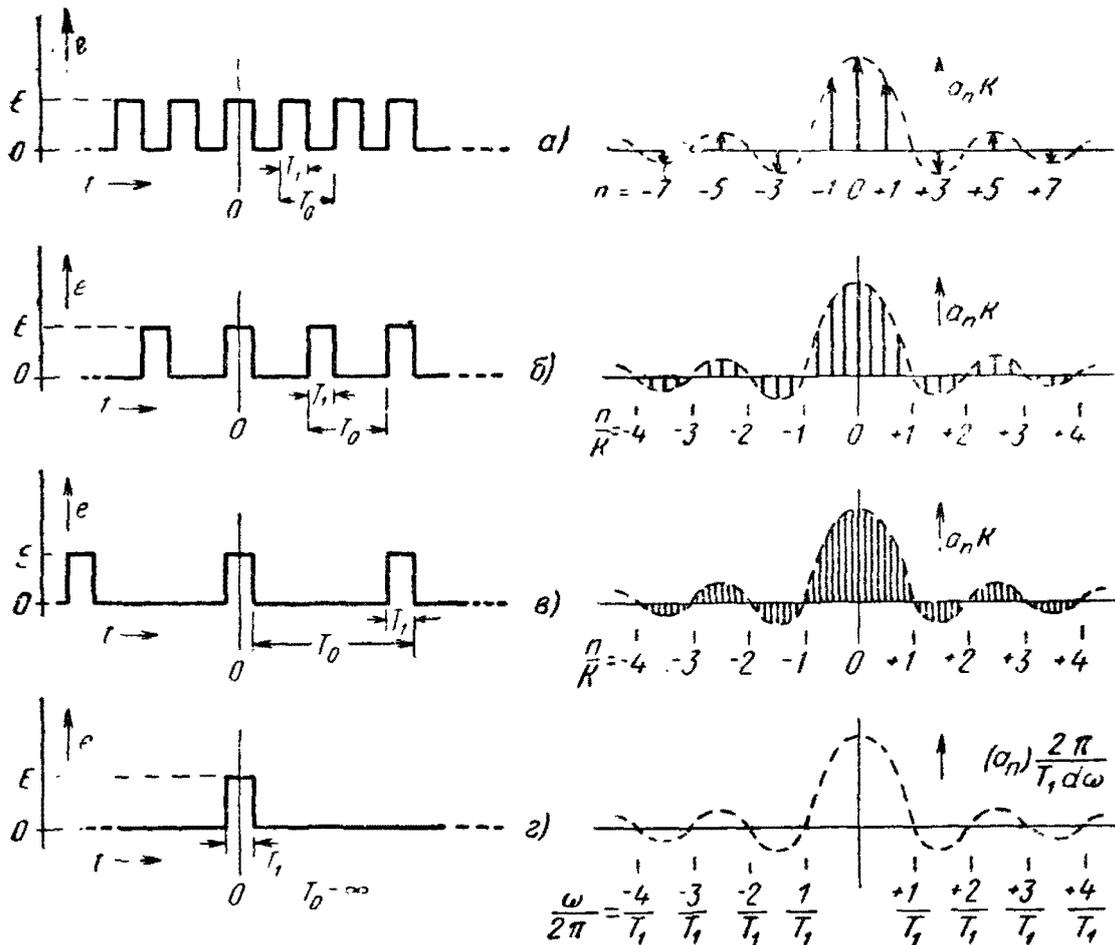


Рис. 28. Спектры прямоугольных импульсов при различных значениях $K = T_0/T_1$ (рисунок может служить только для качественного, а не количественного сравнения).

На рис. 28,а показана прямоугольная кривая с $K=2$ и ее спектр. Спектр изображен в виде сопряженных составляющих гармоник основной частоты $\frac{1}{T_0}$ по оси n , аналогичный спектру рис. 25,б. Пунктирная линия представляет огибающую спектра, построенную по уравнению (92) в функции от n . Гармоники соответствуют нечетным целым значениям n .

На рис. 28,б период повторения прямоугольных импульсов T_0 увеличен в два раза (следовательно, $K=4$). Если спектр

этих импульсов представить по оси $\frac{n}{K}$, то уравнение амплитуд гармоник будет иметь вид

$$a_n K = \frac{2EK}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{K}, \quad (109)$$

и огибающая, как это следует из сравнения с уравнением (92), будет той же.

Выражение (109) может быть получено так же, как выражение (107), для чего нужно подставить в (97) $f(t) = E$ для $t = \pm T_1$ и произвести интегрирование. Составляющие спектра будут располагаться в два раза плотнее, чем в спектре a . Спектр импульсов с большим периодом повторения, т. е. с большим K , показан на рис. 28, в. Гармоники располагаются еще плотнее, а огибающая остается той же самой.

По вертикальной оси в этих спектрах откладывается $a_n K$ вместо a_n .

Таким образом, для импульса данной формы может быть построена „универсальная“ огибающая, независящая от периода повторения импульсов.

В пределе при $T_0 \rightarrow \infty$ получается одиночный импульс (рис. 28, 2) и спектр его будет иметь ту же огибающую, но гармоники в нем будут располагаться непрерывно с бесконечно малыми интервалами между ними.

При $T_0 \rightarrow \infty$ гармоники спектра сближаются, располагаясь на расстояниях $\frac{2\pi}{T_0}$ по оси угловых частот. Если эти расстояния обозначить через $\delta\omega$, то $n\delta\omega$ будет соответствовать непрерывной шкале по оси частот. Тогда

$$\frac{2\pi}{T_0} = \delta\omega, \quad K = \frac{T_0}{T_1} = \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} \quad (110)$$

и

$$n = \frac{\omega}{\delta\omega}, \quad (111)$$

так что применяемый в „универсальных“ спектрах масштаб по горизонтальной оси можно использовать и для предельного случая. Этот масштаб с делениями через $n \frac{T_1}{T_0}$ можно представить еще и так: если n — номер гармоники периода повторения T_0 , то $\frac{nT_1}{T_0}$ — номер гармоники импульса длительностью T_1 даже при $T_0 \rightarrow \infty$. На оси непрерывного спектра (рис. 28, 2) нанесена такая шкала.

Уравнения (96) и (97) для ряда Фурье изменяются следующим образом в случае одиночного импульса. Подстановка ω вместо $2\pi n/T_0$ превращает выражение (96) в выражение ряда синусоидальных составляющих с амплитудами a_n или b_n , частоты которых разделены интервалами $\delta\omega$. Тогда Σ превращается в интеграл, и выражение (96) переходит в

$$f(t) = \int_0^{\infty} \left. \begin{array}{l} a(\omega) \cos \\ b(\omega) \sin \end{array} \right\} \omega t d\omega. \quad (112)$$

Вместо дискретных амплитуд гармоник a_n и b_n здесь написаны функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$, чтобы показать, что они являются непрерывными функциями ω . Строго говоря, $a_n/\delta\omega \rightarrow a(\omega)$ и $b_n/\delta\omega \rightarrow b(\omega)$.

Эти функции получаются из выражения (97) при той же подстановке, с учетом того, что амплитуды теперь бесконечно малы, а пределы интегрирования $\pm T_0/2$ переходят в $\pm \infty^*$.

$$\left. \begin{array}{l} a_n/\delta\omega \\ b_n/\delta\omega \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a(\omega) \\ b(\omega) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left. \begin{array}{l} f_c(t) \cos \\ f_s(t) \sin \end{array} \right\} \omega t dt. \quad (113)$$

Символ $\delta\omega$ означает, что амплитуды бесконечно малы. Функция $f(t)$ разделена здесь на четную и нечетную составляющие $f_c(t)$ и $f_s(t)$.

Интегралы Фурье (112) и (113), соответствующие выражению (96) для ряда Фурье и амплитуд его гармоник (97), дают так называемое „преобразование“ Фурье, имеющее чрезвычайно важное значение для понимания переходных процессов в цепях. Как видно, эти интегралы почти симметричны относительно ω и t , и симметрия еще лучше выявляется, если воспользоваться понятием о сопряженных составляющих. Тогда оба интеграла будут иметь пределы $\pm \infty$. При разложении каждой косинусоидальной и синусоидальной составляющей на две составляющих равной амплитуды с одинаковыми, но противоположными по знаку частотами, как в (98), интеграл (112) принимает вид

$$\left. \begin{array}{l} f_c(t) \\ f_s(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left. \begin{array}{l} a(\omega) \cos \\ b(\omega) \sin \end{array} \right\} \omega t d\omega \quad (114)$$

* Уравнение (113) определяет так называемую „плотность спектра“.

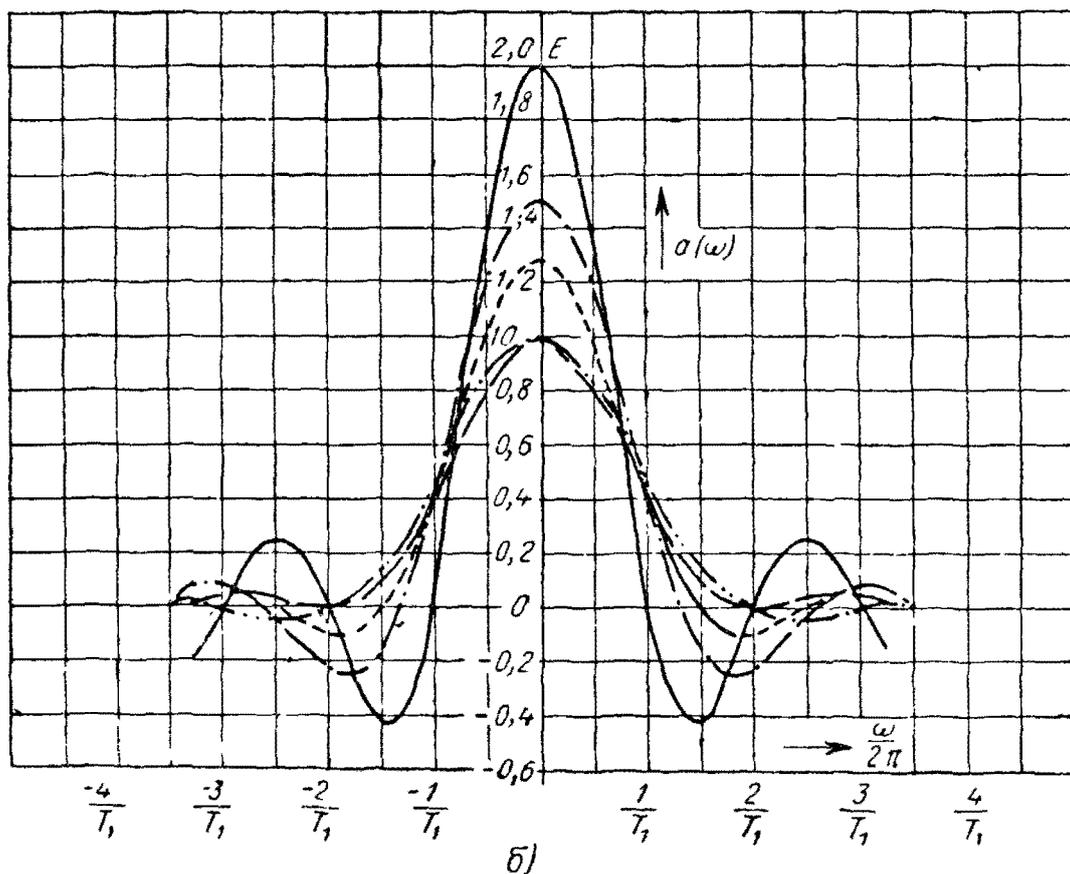
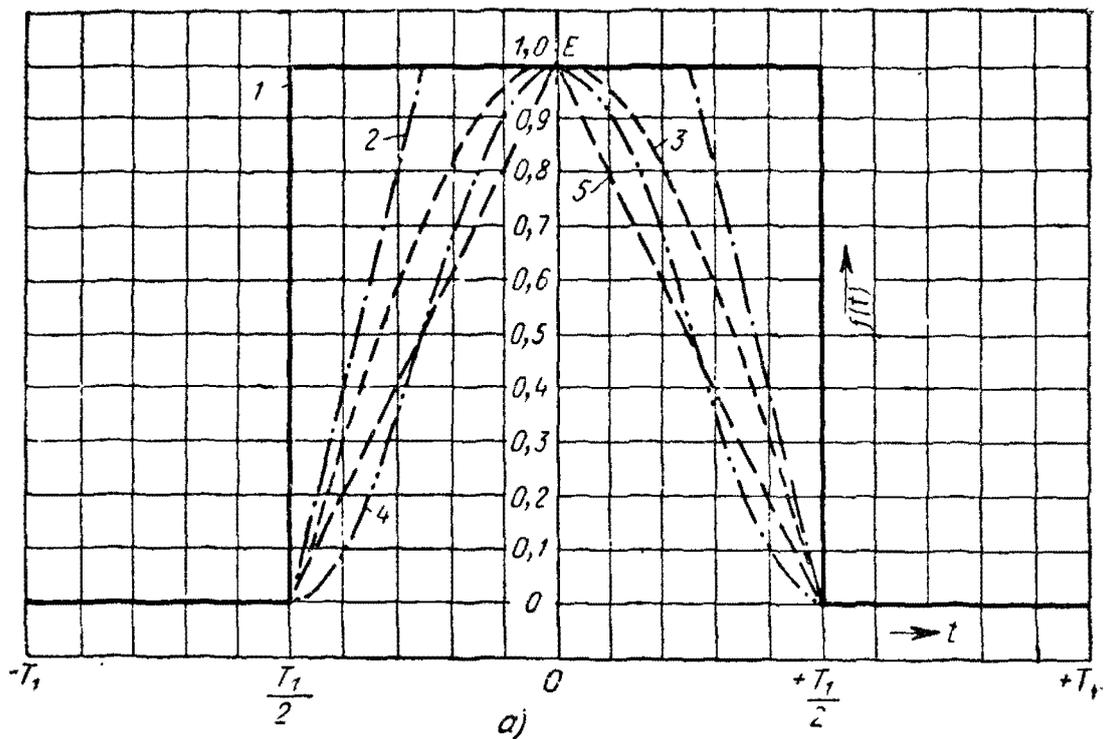


Рис. 29. Некоторые импульсы и их спектры:

а) форма симметричных импульсов; б) непрерывные спектры.
 1 — прямоугольный импульс, 2 — трапециoidalный импульс, 3 — полукосинусоидный импульс, 4 — квадратично-косинусный импульс, 5 — треугольный импульс.

и представляет непрерывный спектр составляющих всех частот от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$. Спектр для импульса симметричной формы показан на рис. 28,2.

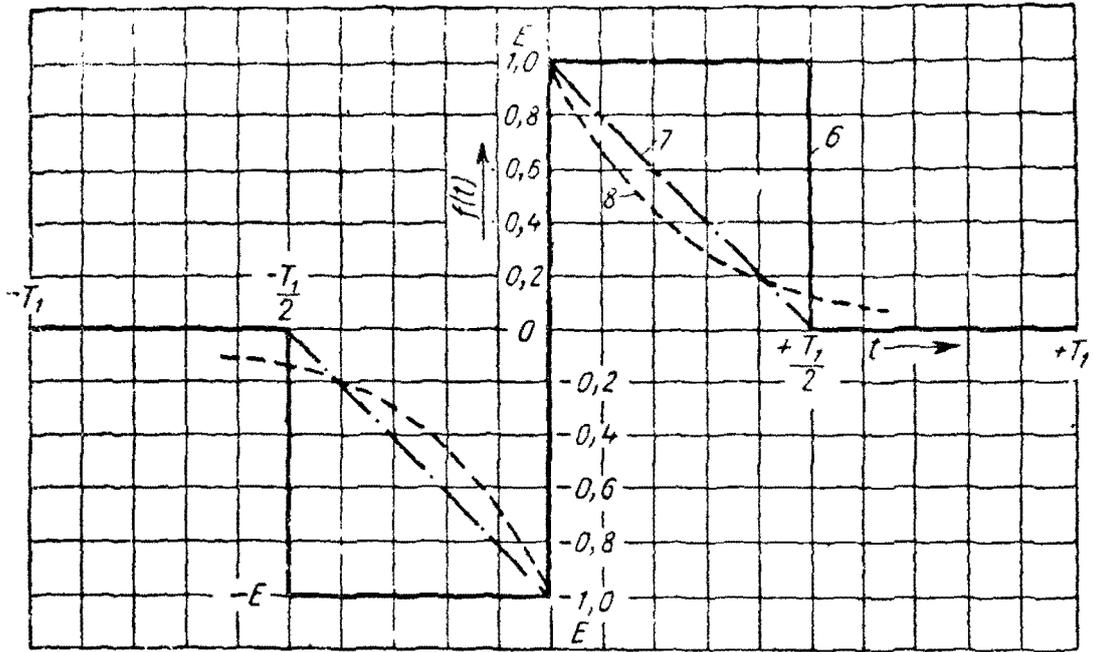
Интегралы (113) и (114) можно, если требуется, представить в показательной форме, воспользовавшись уравнениями (100). Показательная форма удобнее для аналитических выражений, но для выяснения геометрических соотношений и представлений, являющегося предметом этой книги, тригонометрическая форма оказывается более подходящей.

На рис. 29, а представлено несколько импульсов той же формы, что и на рис. 27, но с периодом повторения $T_0 \rightarrow \infty$. Длительность всех импульсов равна T_1 и максимальная амплитуда — единице. Спектры этих импульсов показаны на рис. 29, б с интервалами $\frac{1}{T_1}$ по оси частот. По вертикальной оси отложены относительные амплитуды $a(\omega)K$, равные в пределе $\frac{a_n 2\pi}{T_1 \delta\omega}$ при $T_0 \rightarrow \infty$, так что те же формы и спектры импульсов могут быть использованы и для периодически повторяющихся импульсов с периодом T_0 при подстановке $\delta\omega = \frac{2\pi}{T_1 K} = \frac{2\pi}{T_0}$. В этом случае кривые спектров будут представлять огибающие гармонических составляющих, уравнения которых приведены на рис. 27. В таблице А к рис. 29, а и б даны уравнения непрерывных спектров импульсов.

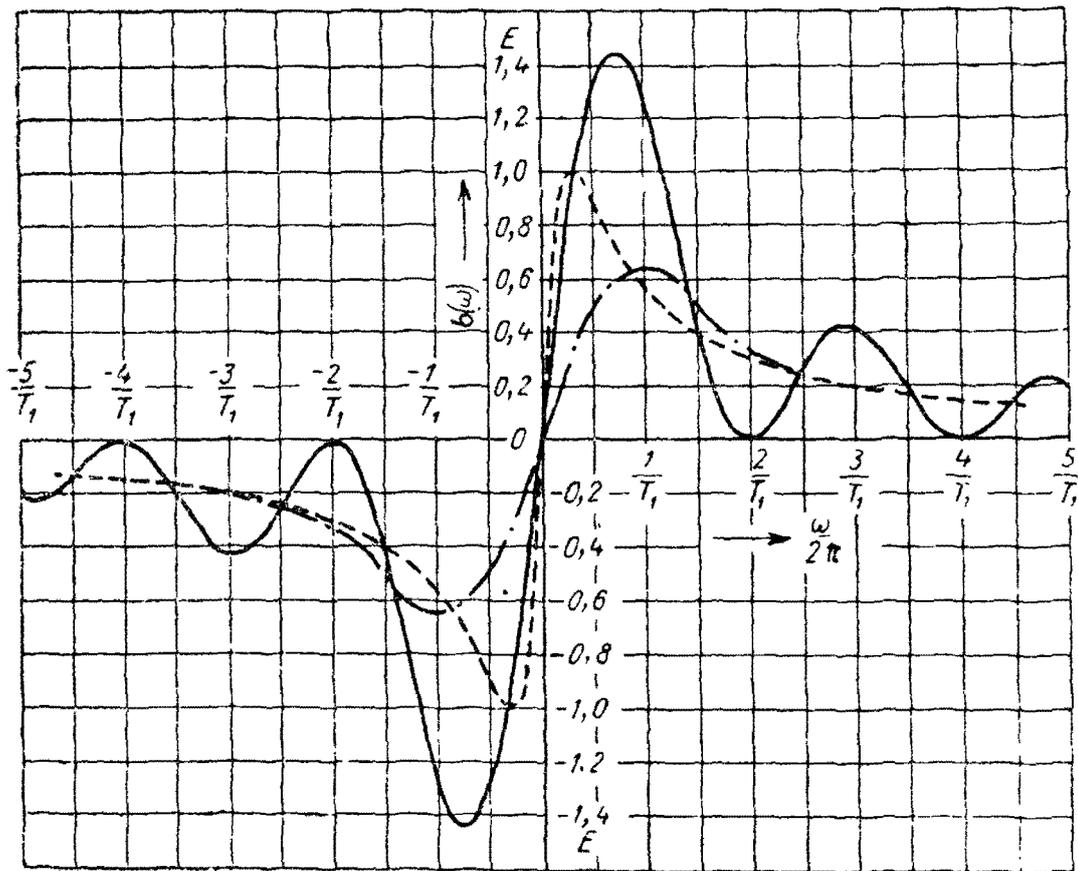
Таблица А

(к рис. 29 а и б)

Импульсы симметричной формы	Уравнение огибающей спектра
Прямоугольный	$a_n \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} = \frac{4E}{\omega T_1} \sin \frac{\omega T_1}{2}.$
Полукосинусоидный	$a_n \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} = \frac{4E \cos \omega T_1 / 2}{\pi (1 - \omega^2 T_1^2 / \pi^2)}.$
Квадратично-косинусный	$a_n \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} = \frac{2E \sin \omega T_1 / 2}{\omega T_1 (1 - \omega^2 T_1^2 / 4\pi^2)}.$
Треугольный	$a_n \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} = \frac{8E}{\omega^2 T_1^2} \left(1 - \cos \frac{\omega T_1}{2} \right).$
Трапецоидальный	$a_n \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} = \frac{16E}{\omega^2 T_1^2} \left(\cos \frac{\omega T_1}{2} - \cos \frac{\omega T_1}{4} \right).$



а)



б)

Рис. 29. Некоторые импульсы и их спектры:

а) форма импульсов, обладающих симметрией 2-го рода; б) непрерывные спектры: 6—прямоугольный импульс, 7—треугольный импульс, 8—импульс экспоненциальной формы.

Следует обратить внимание на то, как влияет на форму спектра изменение наклона фронта импульса, закругление „углов“ и т. д.

Таблица Б

(к рис. 29, в и г)

Импульсы, обладающие симметрией 2-го рода	Уравнение огибающей спектра
Прямоугольный	$b_n \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} = \frac{-4E}{\omega T_1} \left(\cos \frac{\omega T_1}{2} - 1 \right).$
Треугольный	$b_n \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} = \frac{4E}{\omega T_1} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T_1}{2}}{\omega T_1} - 1 \right).$
Экспоненциальный	$b_n \frac{2\pi}{T_1 \delta\omega} = 4E \left(\frac{\omega T_1}{4 + \omega^2 T_1^2} \right).$

На рис. 29 в и г приведено несколько импульсов с симметрией 2-го рода и их непрерывные спектры. Здесь так же, как и в предыдущем случае, по вертикальной оси отложены значения $b_n \cdot 2\pi / T_1 \cdot \delta\omega$, и кривые могут быть применены для периодически повторяющихся импульсов. В состав спектра входят только синусоидальные составляющие, так как импульс является нечетной функцией. В таблице Б приведены уравнения непрерывных спектров. Так как интеграл Фурье (113) берется в пределах $-\infty < t < +\infty$, этот метод вычисления частотных спектров $a(\omega)$ и $b(\omega)$ можно применить к переходным процессам, не обязательно имеющим конечную длительность T_1 , как в случае импульсов. В практических целях переходные процессы, начинающиеся в определенный момент времени, продолжаются принципиально бесконечно долго, хотя в большинстве случаев можно считать, что процесс прекращается в конце определенного отрезка времени — эффективной длительности переходных процессов.

Любая переходная э. д. с., независимо от ее формы, может быть разделена на четные и нечетные составляющие по методу, изложенному в § 20 для периодических кривых, и затем разложена в спектр косинусоидальных или синусоидальных членов.

Примеры применения интеграла Фурье для разложения кривых будут даны в последующих главах; в частности, в § 35 главы IV рассматриваются два примера, представляющих большой интерес, — разложение прямоугольного импульса и единичного скачка.

22. Несколько теорем о форме кривых переходных процессов и их частотных спектров

В этом параграфе приводятся некоторые важные положения, которые рассматриваются детально в последующих главах, в связи с их практическим применением.

А. Принцип приведения несущей частоты к нулю (§ 16) может быть применен к огибающей одиночного импульса любой формы так же, как к периодическим кривым. Таким образом, спектр любого импульса, показанного на рис. 29, б, представленного сопряженными составляющими, расположенными симметрично относительно нулевой частоты (постоянной составляющей), может быть перемещен по оси частот и расположен симметрично относительно несущей частоты $\omega_0/2\pi$. Приведенный спектр будет спектром несущей, модулированной по амплитуде импульсом данной формы. Рис. 18 и 19 иллюстрируют применение этого принципа к огибающим периодических колебаний.

Б. К спектрам может быть применена теорема суперпозиции. Так же, как можно складывать любое число различных кривых для получения сигнала сложной формы, можно складывать и спектры этих кривых, причем синусоидальные и косинусоидальные составляющие должны складываться отдельно. Справедливость этого положения очевидна и не требует доказательства. Начало отсчета времени складываемых кривых, конечно, должно быть одним и тем же. Начало отсчета должно быть также фиксированным для вычисления отдельных спектров.

Если $f_1(t), f_2(t), f_3(t) \dots$ кривые различных форм, а $a_1(\omega), a_2(\omega), a_3(\omega) \dots$ их спектры косинусоидальных и $b_1(\omega), b_2(\omega), \dots$ синусоидальных составляющих, спектры сложной кривой $f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots$ будут соответственно равны $a_1(\omega) + a_2(\omega) + a_3(\omega) + \dots$ и $b_1(\omega) + b_2(\omega) + b_3(\omega) + \dots$

В. В предыдущем параграфе было указано, что два интеграла Фурье, из которых (113) дает выражение для спектров $a(\omega)$ и $b(\omega)$ и (114) дает выражение для четных $f_c(t)$ и нечетных $f_s(t)$ составляющих, симметричны относительно времени (t) и угловой частоты (ω). Это значит, что t и ω можно поменять местами без изменения общего вида этих интегралов. Это положение имеет важное практическое значение. Например, одиночный прямоугольный импульс (рис. 28, з) имеет огибающую спектра, показанную на этом же рисунке справа. Согласно высказанному выше положению, можно поменять местами шкалы t и ω . Это значит, что импульс, имеющий форму, показанную справа, будет иметь огибающую

спектра, показанную слева (т. е. прямоугольной формы). Начала отсчетов остаются без изменений. В общем, если кривая $f_c(t)$ имеет огибающую частотного спектра $a(\omega)$, то кривая $a(t)$ будет иметь огибающую спектра $f_c(\omega)$. То же самое справедливо для $f_s(t)$ и $b(\omega)$.

Взаимозаменяемость кривой и огибающей ее спектра* относится только к их форме; амплитуды начальной кривой и вновь полученной не связаны определенной зависимостью.

Любая кривая, изображающая форму импульса (рис 29, а), и соответствующая ей огибающая спектра (рис. 29, б) могут быть взаимозаменяемы при подстановке $\frac{1}{T_1}$ вместо T_1 , так что кривые рис. 29, б будут представлять формы импульсов, а кривые рис. 29, а — огибающие их спектров.

По этим соображениям интегралы 113 и 114 называются преобразованиями Фурье.

Г. Согласно теореме Релея энергия волны остается одной и той же, независимо от того, вычислена ли она по ее графику или по спектру. Так, энергия W волны, имеющей вид $f(t)$ равна

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt \quad (115)$$

в соответствующих единицах.

Энергия отдельной синусоидальной составляющей спектра с частотой $\frac{\omega}{2\pi}$ и амплитудой $a(\omega)$ или $b(\omega)$ пропорциональна $[a(\omega)]^2$ или $[b(\omega)]^2$. Суммарная энергия спектра равна сумме энергий отдельных составляющих, т. е.

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\begin{matrix} a(\omega) \\ b(\omega) \end{matrix} \right]^2 d\omega. \quad (116)$$

Так как интегралы (115) и (116) равны, то это дает соотношение площадей, ограниченных кривой сигнала и огибающей соответствующего ей спектра, с ординатами, возведенными в обоих случаях в квадрат.

Д. В случае импульса симметричной формы (как на рис. 29, а), составляющие будут только косинусоидаль-

* Строго говоря, можно менять местами частоту $f = \frac{\omega}{2\pi}$ (а не ω) и время t , т. е. они являются взаимобратными величинами.

ными, и максимальная амплитуда при $t=0$ равна сумме амплитуд всех составляющих спектра, так как $\cos 0 = 1$.

В случае асимметричного импульса, максимальная амплитуда при $t=0$ также равна сумме амплитуд косинусоидальных составляющих, так как амплитуды синусоидальных составляющих при этом равны нулю. Отсюда

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) d\omega, \quad (117)$$

причем этот интеграл равен площади, ограниченной огибающей непрерывного спектра.

Аналогично, амплитуда периодической кривой в начальный момент $t=0$ равняется сумме амплитуд (конечных) косинусоидальных гармонических составляющих.

ГЛАВА III

ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ

23. Характеристики цепей

Практически все электрические колебания должны создаваться какими-то электрическими схемами. Целесообразно поэтому рассмотреть общие свойства цепей в установившемся режиме до перехода к изучению неустановившихся процессов, вызываемых в них кратковременными импульсами или какими-либо другими э. д. с. сложной формы.

Электрические цепи можно классифицировать по различным признакам: они могут быть активными или пассивными, линейными или нелинейными, а также разделяться на различные классы по избирательным свойствам. Многие цепи, применяемые в каналах связи, состоят из комбинации реактивных сопротивлений, обладающих определенными, заранее заданными, свойствами в отношении пропускания сигналов, спектр частот которых лежит в известном диапазоне. Они могут применяться для разделения сигналов различных форм, при чем очень важно знать, что способность цепи разделять два совпадающих во времени сигнала зависит от характеристик ее в установившемся режиме. Такое разделение никогда не может быть точным и совершенным, но избирательные цепи могут ослабить гармонические составляющие одного сигнала больше, чем другого (если только эти составляющие не одной частоты, что может иметь место при частично налагающихся друг на друга спектрах).

Избирательные цепи могут также применяться для видоизменения формы сигнала в желательном направлении (так называемые „формирующие цепи“). Такие функции избирательной цепи можно рассматривать с точки зрения установившегося режима: в цепи происходит изменение амплитуд

и фаз гармонических составляющих сигнала, вследствие чего изменяется его форма. Это очень удобно во многих случаях, когда расчет избирательной цепи основан на применении некоторых типовых цепей (как это часто имеет место в схемах связи), так называемых фильтров, получивших широкое распространение.

Идеальные характеристики для установившегося режима или „кривые избирательности“ таких фильтров хорошо известны, так же, как и характеристики других часто применяемых типовых цепей, которые, строго говоря, нельзя называть фильтрами.

Конструктивно фильтр состоит из повторяющихся звеньев, образованных чисто реактивными сопротивлениями. На рис. 30 приведена в качестве примера схема фильтра, состоящего из бесконечно большого числа одинаковых звеньев. Каждое звено представляет четырехполюсник, т. е. цепь, в которой сигнал подводится к одной паре зажимов ab , а снимается с другой пары — cd .

Если сопротивления последовательного и параллельного плеч звена фильтра образованы цепями-двойниками (см. § 2), то фильтр называется фильтром типа К, как например, в схеме рис. 30, в которой индуктивность в последовательном плече и емкость в параллельном являются сопротивлениями-двойниками. Другие типы фильтров являются разновидностями этой основной схемы, но рассмотрение их конструкции не входит в задачи данной книги.

Фильтры различаются по их избирательным свойствам. Так, фильтр, пропускающий сигналы всех частот ниже некоторой предельной частоты и ослабляющий сигналы, частота которых выше этой частоты, называется фильтром нижних частот. Фильтр, пропускающий сигналы определенной полосы частот и ослабляющий сигналы всех частот, лежащих за пределами этой полосы, называется полосовым фильтром. Аналогично, фильтр, пропускающий сигналы всех частот выше некоторой предельной частоты и ослабляющий сигналы, частота которых ниже этой частоты, называется фильтром верхних частот, а фильтр, ослабляющий сигналы определенной полосы частот и пропускающий сигналы всех частот, лежащих за пределами этой полосы, называется заградительным фильтром.

Фильтры первоначально предназначались для выделения в установившемся режиме требуемых сигналов в телефонных системах. В последнее время они стали применяться в системах, работающих в неустановившемся режиме—телеграфии, телевидении и радиолокации,

Приводимые в литературе характеристики фильтров являются обычно идеализированными в том отношении, что они даются для фильтра, состоящего из бесконечно большого числа звеньев (рис. 30, а), тогда как практически они состоят всего из нескольких, а часто даже одного звена и сопротивления нагрузки.

Некоторые схемы фильтров приведены на рис. 31. На рис. 31, в изображен двухзвенный фильтр нижних частот типа К с сопротивлением нагрузки, а на рис. 31, г однозвенный фильтр, включенный в качестве анодной нагрузки усилителя.

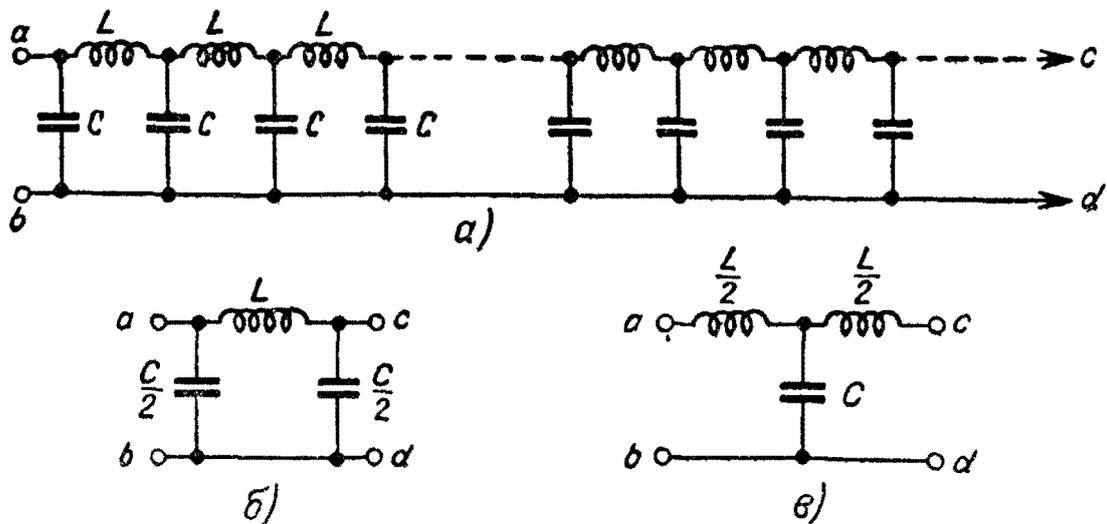


Рис. 30. Типы фильтров. Фильтр может быть разбит на Т-образные и П-образные звенья.
 а) бесконечный фильтр, состоящий из одинаковых звеньев, б) П-образное звено; в) Т-образное звено.

Идеализированные характеристики лишь весьма приблизительно отражают свойства таких фильтров и пользование ими при рассмотрении переходных процессов в схемах может привести к ошибочным выводам. Идеализация состоит также в том, что не учитывается рассеяние энергии элементами фильтра. Практически гораздо проще либо рассчитать характеристики фильтра с конечным числом звеньев для установившегося режима по законам Кирхгофа, либо собрать схему и снять характеристики.

На рис. 31, а изображен одиночный настроенный контур, а на рис. 31, б типичный полосовой фильтр, применяемый в телевизионных приемниках. Представленные на этом рисунке схемы приняты в качестве „типовых“. Рис. 31, д представляет схематическое изображение П-образного четырехполюсника, составленного из трех двухполюсников Z_1 , Z_2 и Z_3 , которые могут иметь любую желаемую конфигурацию.

Чтобы охарактеризовать свойства конкретной цепи в отношении ее избирательности или реакции на э. д. с. данной формы, недостаточно сказать, что эта цепь относится к определенному классу фильтров или других типовых цепей. Если бы цепь была простым последовательным настроенным контуром, то было бы достаточно сказать, например, что это резонансный контур с определенной добротностью Q . Это определяет форму тока в контуре при подключении к нему любой э. д. с. Но если цепь сложнее

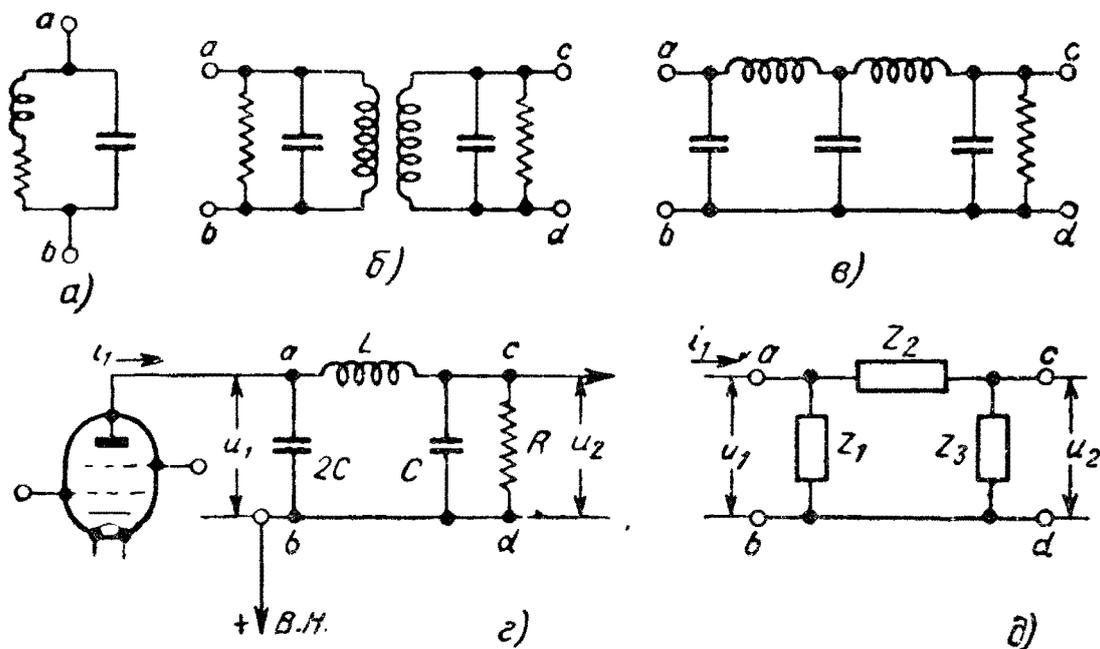


Рис. 31. Примеры простых двухполюсников и четырехполюсников.

и состоит из большого числа контуров, то принадлежность ее к тому или иному классу или типу схем дает лишь общее и только качественное представление о процессах в ней.

Точное определение поведения цепи под воздействием сигнала данной формы, периодического или непериодического, возможно в том случае, если измерены характеристики установившегося режима цепи на всех частотах от нуля до бесконечности. Практически, однако, достаточно определить характеристики в некоторых интервалах частот и затем интерполировать их для промежуточных значений. Кроме того, цепь обычно должна работать в некотором ограниченном диапазоне частот.

Иногда, например в телефонии, принято измерять только величину установившегося тока в цепи под действием сигналов различных частот, так как сдвиг фаз не имеет существ-

венного значения*. В других случаях должны быть измерены не только величина (амплитуда или модуль), но и фазовый сдвиг. Например, это весьма важно в телевидении, где передаются сигналы определенной формы, которая должна быть сохранена с достаточной точностью. Величина тока в канале, вызываемого э. д. с. определенной формы, может быть вычислена при условии, если известны как амплитуда, так и сдвиг фаз в установившемся режиме на всех частотах. Имеются, однако, другие практические методы оценки фазовых искажений в канале. Эти методы весьма ценны, так как непосредственно измерять сдвиг фаз чрезвычайно трудно. Они основаны на наблюдении искажения формы кривой определенного вида, например, скачка напряжения (рис. 4,а).

24. Определение характеристик двух-и четырехполюсников

Большинство цепей, применяемых в каналах связи, являются четырехполюсниками. Сигнал в таких цепях подается на одну пару зажимов и снимается со второй пары. Если цепь содержит реактивные элементы, то форма сигнала на выходных зажимах будет, вообще говоря, отличаться от формы сигнала, подводимого к входным зажимам. Цепь может состоять из нескольких ветвей, каждая из которых является двухполюсником. Некоторые примеры таких цепей даны на рис. 31, где а) является двухполюсником, а б) и в) — четырехполюсниками.

При рассмотрении характеристик линейного четырехполюсника (самого по себе, без связи с другими цепями) нет необходимости рассматривать отдельно входящие в него элементы, а достаточно определить изменение амплитуды и фазы на выходных зажимах cd синусоидального сигнала, поданного на входные зажимы ab . Удобно изображать четырехполюсник схематически в виде прямоугольника, как на рис. 32,а, могущего содержать любое число и любую комбинацию элементов. Очевидно, что для расчета характеристик цепи необходимо знать схему, заключенную в этот прямоугольник.

На зажимы ab четырехполюсника (рис. 32,а) подается входное напряжение u_1 , а с зажимов cd снимается выходное напряжение u_2 . Предполагается, что цепь линейна, т. е. что

* Человеческое ухо, в отличие от глаза, не может различать сдвига фаз между чистыми тонами, а реагирует только на отношение амплитуд. Таким образом для электрической передачи звуковых сигналов сдвиг фаз в применяемых для этого цепях не имеет, в определенных пределах, значения.

амплитуда напряжения U_2 пропорциональна амплитуде U_1 , а разность фаз этих напряжений не зависит от их амплитуд при любой частоте. Если принимается, что u_1 — синусоидальное напряжение, то u_2 должно быть также синусоидальным.

В общем случае u_2 будет отличаться от u_1 по амплитуде и фазе, и это отличие будет зависеть от соединения элементов цепи.

Допустим, что

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U_1 \cos \omega t \\ u_2 &= U_2 \cos (\omega t - \varphi) \end{aligned} \right\}, \quad (118)$$

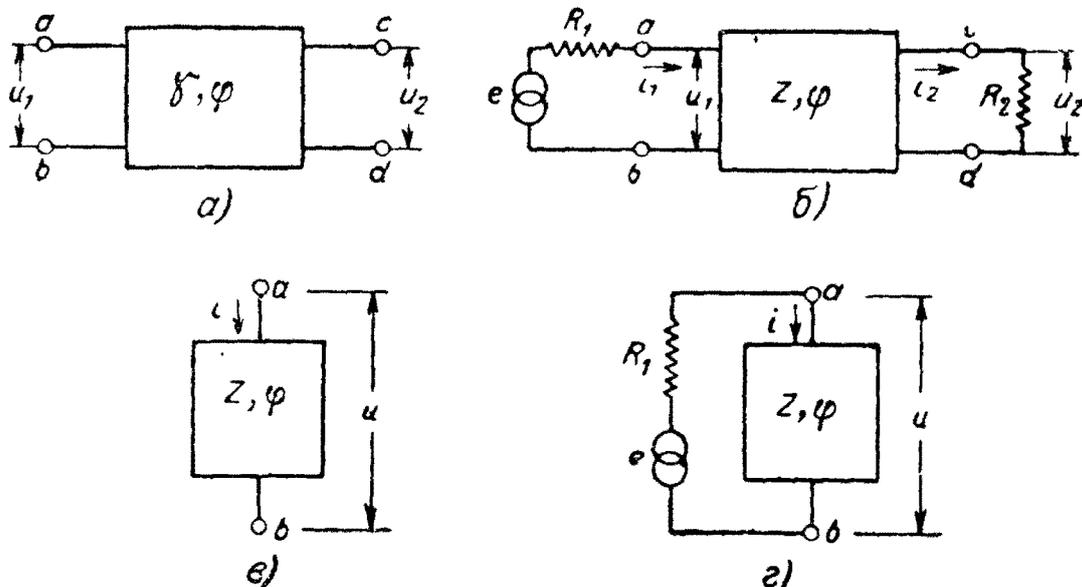


Рис. 32. Условное обозначение двухполюсников и четырехполюсников: а) и б) четырехполюсники, в) и г) двухполюсники.

тогда u_2 отстает от u_1 по фазе на угол φ или на время $t_1 = \frac{\varphi}{\omega}$ (так как u_1 достигает амплитудного значения в момент $t=0$, а u_2 позднее на $t = +\frac{\varphi}{\omega}$). Можно считать, что u_2 имеет отрицательный сдвиг фазы ($-\varphi$) относительно u_1 .

Если обозначить отношение $\frac{U_2}{U_1}$ через γ (отношение амплитуд напряжений u_2 и u_1), тогда величины $-\varphi$ и γ можно назвать постоянными передачи для данной частоты ω .

Практически, однако, в телефонии и телеграфии, где применяются длинные линии, принято определять постоянные передачи четырехполюсника для обратного отношения

$$\frac{u_1}{u_2}.$$

В данном примере такое определение дает

$$\frac{U_1}{U_2} = \left| \frac{u_1}{u_2} \right| = \frac{1}{\gamma}. \quad (119)$$

Фазовый сдвиг u_1 относительно u_2 равен $+\varphi$.

Вообще говоря, не так важно, какое из этих определений будет взято, но если приводятся характеристики цепи, то нужно обращать внимание на то, относятся ли они к $\frac{u_2}{u_1}$ или к $\frac{u_1}{u_2}$.

Приведенное выше определение дано для одной фиксированной частоты. Если γ и φ будут измерены на всех частотах, они будут (в общем случае) функциями частоты и должны быть обозначены символами $\gamma(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. В такой форме они будут представлять частотную характеристику цепи, т. е. зависимость, например $\frac{u_2}{u_1}$, от частоты. Может показаться неправильным называть $\gamma(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ „постоянными“ передаточными функциями, так как они являются функциями частоты, но это уже установившееся название. Иногда по этим соображениям их называют „передаточными функциями“.

Для упрощения аналитических преобразований часто бывает удобнее выражать входное и выходное напряжения в показательной форме. Например, можно написать уравнение (118) в виде

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \operatorname{Re}(U_1 e^{j\omega t}) \\ u_2 &= \operatorname{Re}(U_2 e^{j(\omega t - \varphi)}) \end{aligned} \right\}. \quad (120)$$

Тогда передаточная функция $\frac{u_2}{u_1}$ является действительной частью от $\frac{U_2}{U_1} e^{-j\varphi}$ и так как в общем случае U_2/U_1 и φ изменяются с частотой, то передаточная функция обычно пишется в комплексной форме

$$F(j\omega). \quad (121)$$

На рис. 32,б представлен четырехполюсник, подключенный к генератору с внутренним сопротивлением R_1 и синусоидальной э. д. с. e . На выходе четырехполюсника включено активное сопротивление R_2 . Токи i_1 и i_2 протекают через

входные и выходные зажимы соответственно. Все величины i_1 , i_2 , u_1 и u_2 могут быть измерены и использованы для представления характеристик цепи различными способами, например, можно определить

$$1) \frac{u_2}{u_1} \text{ — (как было рассмотрено выше); } 2) \frac{u_2}{i_1} \text{ } 3); \frac{i_2}{i_1};$$

для одной или всех частот в виде аналитической функции или отношения измеренных величин, аналогично для всех трех случаев.

Как видно, отношение (2), т. е. отношение выходного напряжения u_2 на зажимах cd к входящему току i_1 во внешней цепи, подключенной к зажимам ab , имеет размерность сопротивления. Это отношение, независимо от того, выражено ли оно в виде аналитической функции от ω или в виде отношения измеренных величин, называется „характеристическим (или передаточным) полным сопротивлением“. Величина, обратная ему, т. е. i_1/u_2 , называется „характеристической (или передаточной) полной проводимостью“.

На рис. 32,б цепь, заключенная в прямоугольнике, имеет передаточное сопротивление Z и фазовый угол φ . Здесь

$$Z = \frac{|u_2|}{|i_1|} \quad (122)$$

и φ — фаза u_2 относительно i_1 .

Выбор типа характеристики цепи в каждом отдельном случае зависит от того, для каких целей нужно иметь данную характеристику. Например, может потребоваться определить форму тока или напряжения, создаваемого на выходе цепи входным напряжением или током известной формы.

Зависимость входного тока i_1 и входного напряжения u_1 (выраженная в виде отношения u_1/i_1) называется „входным полным сопротивлением“ и равна сопротивлению, измеренному между зажимами ab . Аналогично отношение u_2/i_2 называется „выходным полным сопротивлением“.

Входное, выходное и переходное сопротивления, если они известны по модулю и фазовому углу, полностью определяют свойства четырехполюсника, которые необходимо знать для присоединения его к другим цепям. Они определяют поведение цепи в установившемся режиме и, следовательно, если они известны для всех частот от нуля до бесконечности, будут также определять процессы в переходном режиме.

Двухполюсник показан на рис. 32,в также в виде прямоугольника, внутри которого может находиться цепь, состо-

ящая из любого числа контуров и любой комбинации элементов, но имеющая только два внешних зажима. На рис. 32,2 двухполюсник подключен к генератору с внутренним сопротивлением R_1 и э.д.с. e . Поведение такой цепи в установившемся режиме может характеризоваться или отношением напряжения u_1 на ее зажимах к току i , т. е. u/i или обратным отношением i/u . Первое отношение является полным сопротивлением, а второе — полной проводимостью. Сопротивление между входными зажимами двух- или четырехполюсника является нагрузочным сопротивлением для генератора.

Если

$$\left. \begin{aligned} i &= I \cos \omega t \\ u &= U \cos (\omega t - \varphi) \end{aligned} \right\}, \quad (123)$$

то частотная зависимость сопротивления двухполюсника может определяться величиной U/I и фазовым углом напряжения u по отношению к i , т. е. $-\varphi$.

25. Характеристики в сопряженной форме

На рис. 33,в приведены частотные характеристики цепи, изображенной на рис. 31,г, пример определения которых приводится ниже.

Схема П-образного звена фильтра (рис. 31,г) представлена в общем виде на рис. 31,д, где

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{j2\omega C} \\ Z_2 &= j\omega L \\ Z_3 &= \frac{R}{1 + j\omega CR} \end{aligned} \right\}. \quad (124)$$

Отношение выходного напряжения u_2 к входному u_1 равно

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

и

$$u_1 = i_1 \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}.$$

Отсюда передаточное сопротивление

$$\frac{u_2}{i_1} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}. \quad (125)$$

Подставляя значения Z_1 , Z_2 и Z_3 из (124) и упрощая, получим

$$\frac{1}{R} \frac{u_2}{i_1} = \frac{(1 - 2\Omega^2 k) - j(3\Omega - 2\Omega^3 k)}{(1 - 2\Omega^2 k)^2 + (3\Omega - 2\Omega^3 k)^2}, \quad (126)$$

где $\Omega = \omega CR$ и $k = \frac{L}{CR^2}$.

Выражение (126) дает действительную и мнимую часть передаточного сопротивления. Из него можно найти модуль и фазовый угол.

Обозначим действительную часть буквой C и мнимую — jS и перепишем (126) в виде

$$\frac{1}{R} \frac{u_2}{i_1} = C + jS.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{1}{R} \frac{u_2}{i_1} \right| &= \sqrt{C^2 + S^2} \\ \operatorname{tg} \theta &= S/C. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Постоянная k в уравнении (126) имеет размерность Q^2 , где Q — добротность замкнутого колебательного контура (рис. 1,а), характеризующая отношение накопленной энергии в цепи к рассеянной. Однако, рассматриваемая цепь не является столь простой и, строго говоря, Q не имеет такого простого смысла, но этим параметром очень удобно пользоваться при анализе фильтров и аналогичных цепей. Таким образом, давая k различные числовые значения, можно вычислить характеристики цепи общего вида с различным отношением значений параметров. Переменная Ω , пропорциональная частоте, может быть использована как „относительная частота“, и можно начертить для данной схемы семейство характеристик независимо от отношения величин C и R .

На рис. 33,в изображены характеристики изменения модуля и угла сдвига [уравнение (127)] для полосы от нуля до частот выше „частоты среза“ фильтра. Такие обобщенные характеристики называются „универсальными“ характеристиками. Для характеристик на рис. 33,в принято $k = \frac{L}{CR^2} = 2$. Для каждой частоты можно представить u_2 и i_1 в виде векторной диаграммы. На рис. 33,а вектор u_2 отстает от вектора i_1 на угол θ . Вектор тока i_1 является заданным вектором и его можно рассматривать как вектор фиксированной длины $I_1 = |i_1|$, положение которого не меняется с частотой. Тогда вектор u_2 будет иметь на раз-

ных частотах различные величины и фазовый угол относительно i_1 . Если его длину сделать равной $|u_2/i_1|$, то геометрическое место концов вектора при изменении частоты будет представлять величину передаточного сопротивления в полярных координатах.

Для каждой частоты вектор u_2/i_1 может быть представлен в виде двух сопряженных составляющих, точно так же, как вектор синусоидального тока (рис. 13).

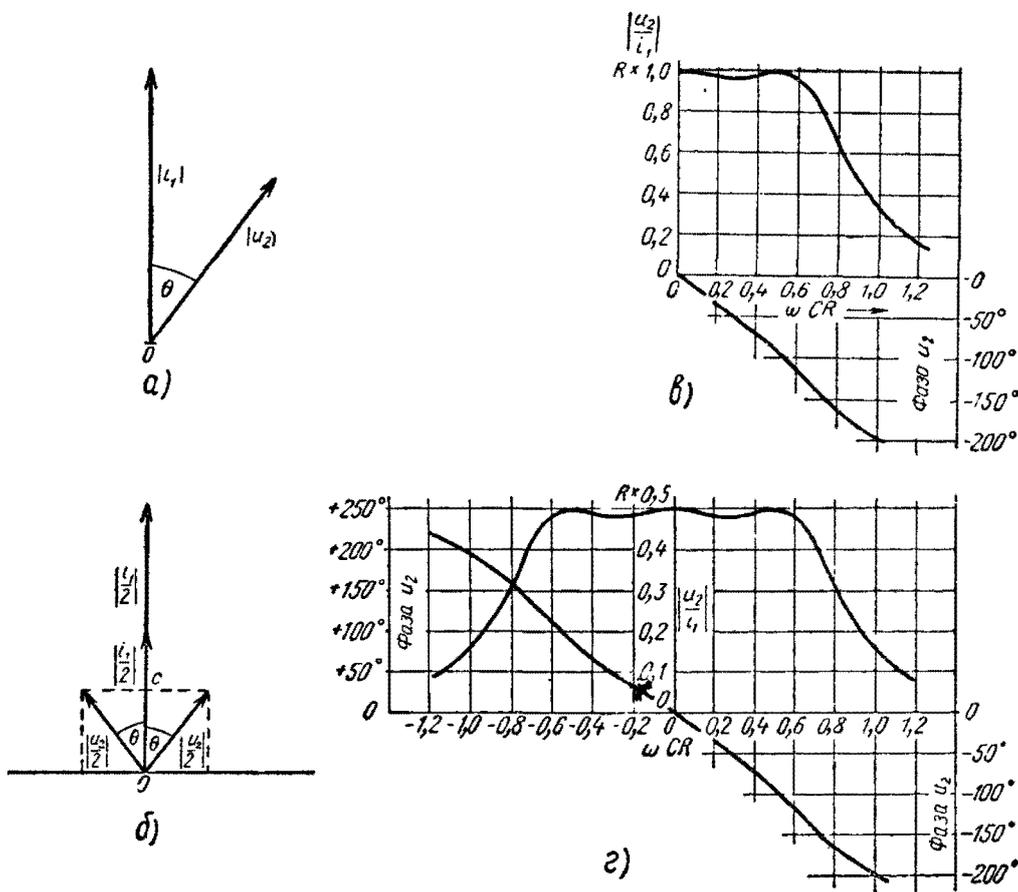


Рис. 33. Векторные диаграммы и частотные характеристики четырех-полюсника:

- а) векторная диаграмма входного тока i_1 и выходного напряжения u_2 для одной частоты;
- б) сопряженная векторная диаграмма передаточного сопротивления на одной частоте;
- в) амплитудная и фазовая характеристики передаточного сопротивления; г) сопряженные амплитудная и фазовая характеристики передаточного сопротивления.

Деля вектор u_2 пополам и изобразив два вектора длиной $|u_2/2|$ под углом θ по обе стороны от действительной оси, получим векторную диаграмму в виде сопряженных составляющих для данной частоты (рис. 33,б). Вектор i_1 направлен по действительной оси и две его сопряженных составляющих, складываясь арифметически, дают начальную длину вектора i_1 . Если теперь разделить векторы $|u_2/2|$ на постоянную величину $|i_1/2|$, то получатся сопряженные составляющие вектора передаточного сопротивления. Модули и

фазовые углы этих сопряженных составляющих могут быть представлены в виде графиков в зависимости от ωCR , как это сделано на рис. 33,2. Правый вектор дает частотные характеристики для положительных частот, а левый — для „отрицательных частот“. Так же, как и в случае представления частотного спектра в виде сопряженных составляющих, нет необходимости в физической конкретизации понятия „отрицательных частот“.

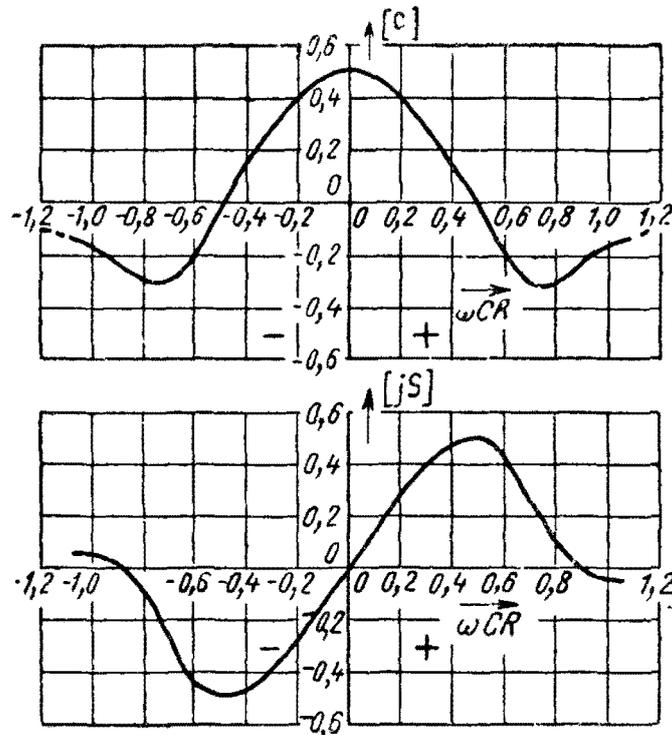


Рис. 33д. Действительная и мнимая составляющие характеристики передаточного сопротивления четырехполюсника (рис. 31,2) при $L/CR^2 = 2$.

Эти характеристики представляют передаточное сопротивление цепи так же, как и характеристики на рис. 33,в, но в симметричной форме. Преимущества такого способа будут показаны позднее. Сопряженные характеристики можно получить, вычерчивая график u_2/i_1 в половинном масштабе в виде двух частей, являющихся зеркальным изображением одна другой, а график фазовых углов — в виде двух частей, обладающих симметрией 2-го рода.

Если входящий ток i_1 в цепи имеет постоянную амплитуду I_1 и изменяется по закону

$$i_1 = I_1 \cos \omega t, \quad (128)$$

то выходное напряжение u_2 равно

$$u_2 = U_2 \cos (\omega t - \theta) \quad (129)$$

и может быть разделено на две равные составляющие, являющиеся функциями положительной и отрицательной частот

$$U_2 \cos(\omega t - \theta) = \frac{U_2}{2} \cos(\omega t - \theta) + \frac{U_2}{2} \cos[-(\omega t - \theta)]. \quad (130)$$

Отношения каждой из этих составляющих к току i_1 дают сопряженные составляющие передаточного сопротивления, представленные на рис. 33,г, имеющие равные амплитуды $U_2/2I_1$, и фазовые углы $\pm\theta$ соответственно.

26. Действительные и мнимые составляющие характеристик цепи

Пользуясь методом, примененным в предыдущей главе для изображения частотных спектров кривых, можно представить характеристики цепей в виде двух частей — симметричных действительных составляющих и мнимых составляющих, обладающих симметрией 2-го рода.

Рассмотрим опять в качестве примера входящий ток i_1 и выходное напряжение u_2 четырехполюсника, выраженные уравнениями (128) и (129). Напряжение u_2 разделено в уравнении (130) на две сопряженные составляющие, представленные в виде векторов на рис. 33,б. Каждый из этих векторов состоит из двух ортогональных составляющих, так как

$$\frac{U_2}{2} \cos(\omega t - \theta) = \frac{U_2}{2} \cos\theta \cos\omega t + \frac{U_2}{2} \sin\theta \sin\omega t. \quad (131)$$

Для правого вектора на диаграмме эти составляющие равны OC и OS , а для левого OC и $-OS$, где

$$OC = \frac{U_2}{2} \cos\theta, \quad OS = \frac{U_2}{2} \sin\theta. \quad (132)$$

Составляющая OC равна амплитуде косинусоиды и, следовательно, находится в фазе с током i_1 [уравнение (128)], тогда как составляющая OS перпендикулярна к ним.

Вычисляя их величины из амплитудной и фазовой характеристик для всего диапазона по оси частот и деля каждую из них на постоянную амплитуду I_1 (являющуюся модулем i_1) можно получить графики действительной $|C|$ и мнимой $|jS|$ составляющих передаточного сопротивления цепи.

Эти составляющие для рассматриваемой цепи (рис. 31,г), амплитудная и фазовая характеристики которой даны на рис. 33,г, показаны на рис. 33,д. Следует отметить, что

в сопряженной форме график действительной составляющей $|C|$ симметричен относительно нулевой частоты, а график мнимой составляющей $|jS|$ обладает симметрией 2-го рода.

Составляющие частотных характеристик можно рассматривать отдельно каждую при определении искажений сигнала. Например, прямоугольники на рис. 34,б представляют условно модуль и фазу передаточного сопротивления четырехполюсника, как отдельные элементы, соединенные последовательно. Входные и выходные зажимы цепи ab и cd являются внешними выводами, как показано на схеме, но деление на две части является чисто условным, так как нельзя сделать цепь, которая имела бы неравномерную, обладающую селективными свойствами амплитудную характеристику и линейную фазовую характеристику (обратное положение неверно, так как можно создать цепь, имеющую нелинейную фазовую и равномерную амплитудную характеристики)*.

Для целей расчета можно считать, что входной сигнал подан на зажимы ab , определить влияние только амплитудной характеристики γ , затем подать полученный гипотетический сигнал на зажимы ef , определить влияние фазовой характеристики φ и получить правильное выходное напряжение на зажимах cd . Аналогично, при использовании действительной и мнимой частей характеристик, их можно рассматривать как соединенные параллельно (рис. 34,в). Хотя это разделение также условно, оно очень удобно для расчетов. Таким образом, можно определить действие приложенного напряжения сначала на действительную составляющую ($\gamma \cos \varphi$, имеющую фазовый сдвиг, равный нулю на всех частотах), затем на мнимую составляющую ($j\gamma \sin \varphi$, имеющую фазовый сдвиг $\pi/2$ на всех частотах) и получить таким образом истинный выходной сигнал u_2 на зажимах cd .

Сопряженные характеристики фильтра нижних частот, приведенные на рис. 33,г (амплитудная и фазовая составляющие), или на рис. 33,д (действительная и мнимая составляющие), можно рассматривать как характеристики полосового фильтра с нулевой средней частотой, так как они симметричны относительно нуля. Это имеет существенное практическое значение при рассмотрении вопроса об искажении амплитудно-модулированных колебаний и будет разобрано далее в § 41.

* См. § 39.

27. Последовательное соединение четырехполюсников

Канал связи состоит, в сущности, из некоторого числа четырехполюсников, соединенных последовательно. Это простейший способ изображения схемы проектируемого канала. На рис. 34,а показана цепочка из четырехполюсников, пронумерованных от 1 до N , каждый из которых может быть полосовым фильтром, участком длинной линии, усилителем или какой-нибудь другой схемой. Может потребоваться и другая схема соединений четырехполюсников, — например, обеспечивающая обратную связь, или схема, в которой от зажимов одного из элементов ответвляется вспомогательная цепочка. Но основной является схема, в которой сигнал приложен к входным зажимам ab первого звена и передается по всей цепочке к выходным зажимам cd N -го звена, причем в каждом звене сигнал искажается в зависимости от ее амплитудной $\gamma(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ характеристик (ограничимся при этом рассмотрением только линейных цепей). Частотные характеристики могут быть различными для каждого звена.

Характеристики любого звена (например, первого) могут быть измерены, если рассматривать схему отдельно от остальных звеньев цепочки и считать, что она нагружена некоторым сопротивлением, например, активным, как на рис. 32,б. Это сопротивление может не быть эквивалентно входному сопротивлению следующего звена, с которым рассматриваемое звено соединяется в реальной схеме; вследствие этого измеренные величины не будут точно характеризовать свойства данного звена. Если характеристики должны быть определены точно, их следует измерять или при нагрузке, равной входному сопротивлению следующего звена, или в полной схеме.

На схеме рис. 34,а принято, что постоянные передачи (γ_1, φ_1) , (γ_2, φ_2) ... и т. д. определены в полной схеме, так что

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \gamma_n \quad (133)$$

и фазовый угол u_{n+1} относительно u_n

$$\omega_n t = \varphi_n. \quad (134)$$

Постоянная передачи всей цепи, равная u_{N+1}/u_1 , выразится через постоянные каждого звена как

$$\left| \frac{u_{N+1}}{u_1} \right| = \left| \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_3} \cdots \frac{u_{N+1}}{u_N} \right| = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdots \gamma_N, \quad (135)$$

а фазовый угол u_{N+1} относительно u_1

$$\varphi_{\text{общ}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_N. \quad (136)$$

Каждое звено можно считать состоящим из двух условных частей, соединенных последовательно (рис. 34,б), так что для целей расчета можно оперировать отдельно с общими амплитудной и фазовой характеристиками [уравнения (135) и (136) соответственно].

Аналогично, каждое звено может быть разделено на действительную $|C|$ и мнимую $|jS|$ части (рис. 34,в). Тогда

$$Z_N(j\omega) = (C_1 + jS_1)(C_2 + jS_2)(C_3 + jS_3) \dots \quad (137)$$

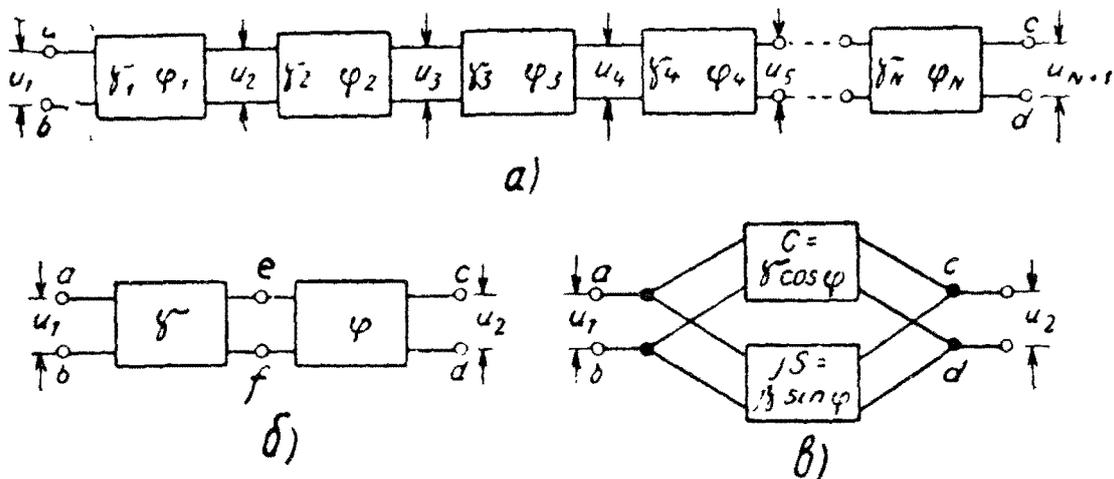


Рис. 34. Условное представление четырехполюсников:

а) цепь из четырехполюсников; б) разделение четырехполюсника на „амплитудную“ и „фазовую“ составляющие; в) разделение четырехполюсника на „действительную“ и „мнимую“ составляющие.

Здесь действительная и мнимая части не разделены. Однако, если представить это выражение в показательной форме и прологарифмировать, получим

$$Z_N(j\omega) = \gamma_1 e^{j\varphi_1} \cdot \gamma_2 e^{j\varphi_2} \cdot \gamma_3 e^{j\varphi_3} \dots$$

и

$$\ln Z_N(j\omega) = \Sigma \ln (C_n + jS_n) = \Sigma \ln \gamma_n + j\Sigma \varphi_n. \quad (138)$$

28. Эквивалентные цепи и цепи-двойники

Цепи, имеющие идентичные частотные характеристики, называются эквивалентными, при чем эквивалентность может быть полной или ограниченной. Полностью эквивалентными можно считать четырехполюсники, имеющие на всех частотах одинаковые входное, выходное и передаточное сопротивления. В этом случае их поведение будет одинаковым,

и любая часть цепи, например, представленной на рис. 34,а, может быть заменена другой, без изменения характеристик всей системы. Дифференциальные уравнения, описывающие переходные процессы в таких цепях, будут тождественны.

Условие полной эквивалентности двухполюсников состоит в равенстве их полных сопротивлений (по модулю и фазе) на всех частотах. Так как четырехполюсники можно рассматривать как сочетание некоторого числа двухполюсников, их эквивалентность зависит от возможности создания эквивалентных двухполюсников. Однако это верно только до известной степени.

Следует воздержаться от применения термина „эквивалентная цепь“ к цепям, эквивалентным только на одной частоте. Например, иногда бывает удобно представить колебательный контур на резонансной частоте в виде эквивалентного активного сопротивления, однако, на всех других частотах характеристики их будут совершенно различны. Очевидно, что переходные процессы будут протекать в них по-разному, так как для идентичности требуется их эквивалентность на всех частотах от нуля до бесконечности (или по крайней мере в рабочем диапазоне частот).

В качестве примера ограниченно-эквивалентных цепей рассмотрим симметричную и асимметричную цепи (называемые также „двухтактной“ и „однотактной“ цепями). Симметричной называется такая цепь, все элементы которой расположены симметрично относительно земли (или какого-нибудь проводника, имеющего опорный потенциал). В асимметричной цепи между одним из входных и выходных зажимов имеется полная проводимость. Такие ограниченно эквивалентные цепи представлены на рис. 35,а. Характеристики их могут быть подобными, если они будут измеряться в симметричной цепи двухтактным генератором и соответствующим измерительным прибором, а в асимметричной цепи — однотактными приборами. Однако эти цепи не могут быть в общем случае взаимозаменяемыми в схеме. Но если характеристики асимметричной цепи вычислены, они могут быть применены и к эквивалентной симметричной цепи.

„Универсальные характеристики“, показанные на рис. 33,г или δ , представляют поведение целого семейства цепей, имеющих определенное сочетание элементов, но могущих отличаться значениями величин этих элементов. Такие цепи можно рассматривать, как потенциально ограниченно-эквивалентные в том смысле, что характеристики их имеют одинаковую форму и могут быть сделаны идентичными подбором величин элементов. Так, например, в цепи 31,г характе-

ристики которой показаны на рис. 33,г и д, можно увеличить емкость C до nC , уменьшить индуктивность L до L/n и R до R/n . При этом масштаб относительных частот ωCR по горизонтальной оси и величина $k = L/CR^2$ остаются неизменными, так что новая цепь будет иметь идентичные по форме характеристики.

В § 5 главы I было показано, что при таком изменении L , C и R виды „нормальных“ колебаний простых цепей не изменяются, а изменяется только масштаб по оси времени.

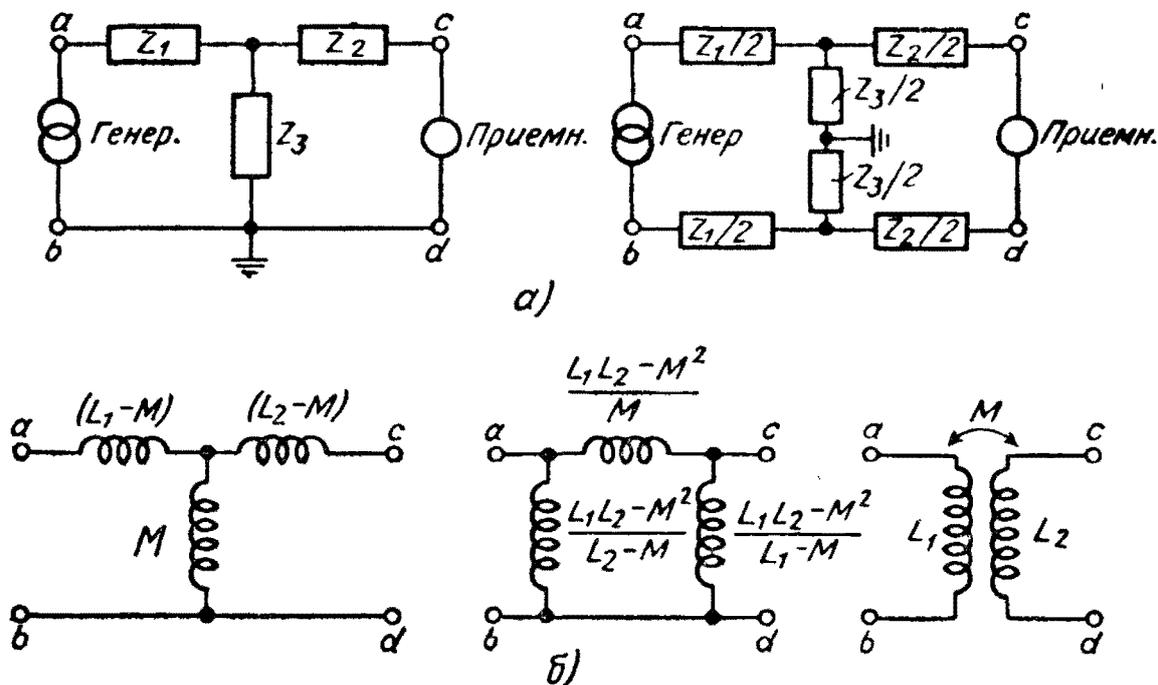


Рис. 35. Примеры ограниченно и полностью эквивалентных цепей: а) двухтактная и одноконтурная ограниченно-эквивалентные цепи; б) П-образный и Т-образный полные эквиваленты двух индуктивно связанных катушек.

Таким образом, переходные процессы в простых цепях могут быть представлены „универсальными“ характеристиками, приведенными в виде примера на рис. 8. Этот же принцип применим к более сложным цепям, если масштаб изменения величин элементов будет одинаковым для всех контуров цепи.

Пример полной эквивалентности приведен на рис. 35,б, где представлены Т-образный и П-образный эквиваленты двух индуктивно связанных катушек. Эти цепи эквивалентны на всех частотах и взаимозаменимы в схеме, так как имеют одинаковые входное, выходное и передаточное сопротивления.

Таким образом, полностью эквивалентные цепи имеют идентичные во всех отношениях характеристики, тогда как

ограниченно эквивалентные цепи (согласно принятому в этой книге определению) имеют некоторое сходство характеристик, позволяющее применять вычисленные или измеренные для некоторого диапазона частот характеристики одной цепи непосредственно для другой цепи. Это позволяет иногда значительно упростить расчеты сложных цепей, путем сведения их к более простым. Здесь не предполагается рассматривать все виды эквивалентных цепей, а лишь привести некоторые основные принципы эквивалентности, облегчающие понимание происходящих в цепи процессов. Общая теория эквивалентности цепей рассматривается во многих учебниках.

Сравнивая дифференциальные уравнения, устанавливающие зависимость между токами и напряжениями, можно заметить, что некоторые цепи имеют одинаковые по форме математические уравнения, хотя по внешнему виду эти цепи кажутся различными.

Например, в § 2 главы I указывалось, что дифференциальные уравнения (3) и (4), составленные для цепей рис. 1,а и б, соответственно тождественны по форме с заменой постоянных L , $1/C$ и R одного уравнения на C , $1/L$ и $1/R$ в другом. Ток и напряжение в них также меняются местами. Ввиду тождественности этих уравнений можно ожидать, что их решения, определяющие переходные процессы, будут иметь одинаковую форму, но одно из них даст закон изменения тока, а второе—закон изменения напряжения. Кривые изменения тока и напряжения будут одинаковы.

Этот принцип можно применить к любой линейной „плоской“ цепи и показать, что все такие цепи разбиваются на пары, называемые двойниками, описываемые одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями, в которых постоянные L и C , R и $1/R$, а также токи и напряжения, меняются местами. Полные характеристики установившихся и переходных процессов в таких цепях будут иметь одинаковую форму при условии, что токи одной цепи будут заменены напряжениями другой и наоборот.

Существуют простые правила образования цепи-двойника для данной плоской цепи. Эти правила можно вывести, рассматривая происхождение отдельных членов дифференциальных уравнений, описывающих процессы в цепях-двойниках. Например, в уравнениях (3) и (4) падение напряжения на последовательном элементе какой-либо цепи соответствует току в параллельном элементе другой цепи (цепи-двойника). Выражение для напряжения на индуктивности аналогично выражению для тока в емкости, а выражение для напряже-

ния на емкости аналогично выражению для тока в индуктивности. Точно так же выражение для падения напряжения на активном сопротивлении аналогично выражению для тока в проводимости и наоборот. Контурный ток в уравнении (3) для цепи рис. 1,а соответствует падению напряжения на параллельно соединенных ветвях в уравнении (4) для цепи рис. 1,б.

Таким образом последовательная (параллельная) индуктивность является двойником параллельной (последовательной) емкости, последовательное (параллельное) сопротивление — двойником параллельной (последовательной) проводимости, а последовательный (параллельный) генератор напряжения двойником параллельного (последовательного) генератора тока.

Распространение этих правил для простых цепей на более сложные цепи, состоящие из нескольких контуров или ветвей, приводит к простому геометрическому приему образования цепи-двойника, который поясняется рис. 3б. На этом рисунке представлены две группы цепей с их двойниками: а) — простая резонансная цепь, которая уже рассматривалась в связи с уравнениями (3) и (4); б) — звено фильтра типа *K*.

Для образования цепи-двойника необходимо:

1) наметить внутри каждого замкнутого контура цепи одну опорную точку (*A, B, C...* на рисунке) и одну точку вне цепи (точка *D*). Эти точки будут узловыми точками цепи-двойника;

2) соединить каждую точку с соседней с помощью линии, проходящей через элемент, общий для обоих контуров, окружающих эти точки. Эти линии будут ветвями цепи-двойника;

3) заменить каждый элемент, через который проходит соединительная линия, его двойником.

Можно применить эти правила повторно к полученным цепям-двойникам, изображенным на рис. 3б, справа. В результате должны получиться первоначальные цепи. Таким образом, если цепь I является двойником цепи II, то цепь II является двойником цепи I. Некоторые цепи имеют двойниками цепи, тождественные им самим.

Описанное свойство цепей-двойников относится только к их конфигурации и не распространяется на величины элементов, входящих в цепь. Если цепи должны быть полными двойниками, то величины их элементов должны выбираться так, чтобы произведение соответствующих реактивных сопротивлений в обеих цепях было постоянным. (Это рассматривается подробнее в следующем параграфе). Тогда характе-

ристики цепей будут идентичными и токи в одной цепи будут пропорциональны напряжениям другой цепи. Так, если формы тока $i_1(t)$ и э.д.с. $e(t)$ генераторов цепей-двойников идентичны, то формы создаваемых ими напряжения $u(t)$ и тока $i_2(t)$ также идентичны. Полное сопротивление одной цепи соответствует проводимости полного двойника между любой парой зажимов.

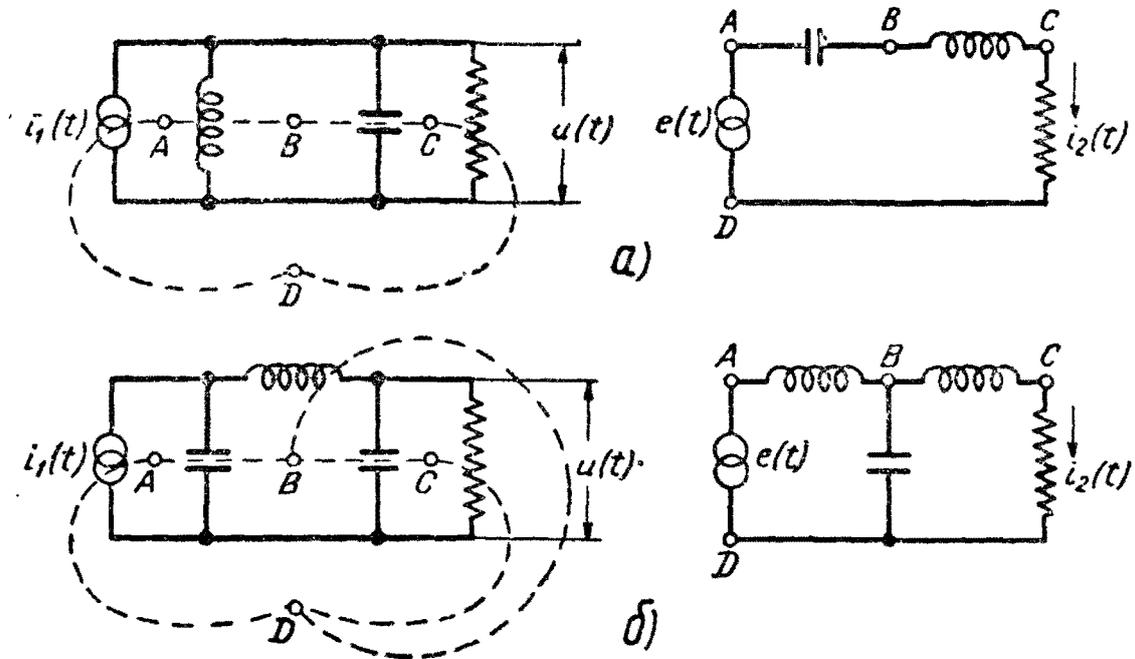


Рис. 36. Правило образования цепей двойников:
 а) колебательный контур; б) фильтр типа К.

До сих пор ничего не было сказано о том, как следует поступать со взаимной индуктивностью, хотя ее легко ввести в общую схему. Применяя приведенное выше правило (2), следует помнить, что каждая пара индуктивно связанных катушек фактически состоит из трех индуктивностей — индуктивностей каждой катушки и взаимной индуктивности. Поэтому линии, соединяющие соответствующие точки, должны проходить через каждую из этих индуктивностей. Двойником каждой индуктивности будет соответственно емкость. Тот же результат будет получен, если индуктивно связанные катушки будут заменены эквивалентной схемой, показанной на рис. 35,б, состоящей только из самоиндукций.

29. Характеристики двухполюсников

На первый взгляд может показаться, что характеристики цепи, состоящей из некоторого числа элементов, могут иметь самые различные формы в зависимости от комбинации этих

элементов. Однако можно показать, что для чисто реактивной цепи, не содержащей активных, рассеивающих энергию, сопротивлений, возможна существенная систематизация характеристик, а для двухполюсников, состоящих из известного числа реактивных элементов, возможны только четыре формы характеристик.

Поведение фильтров и других реактивных четырехполюсников будет понятнее, если изучить отдельно характеристики элементов, из которых они состоят. Например, основными типами звеньев фильтров является Т-образное и П-образное звено, схемы которых приведены на рис. 35,а и 31,д, соответственно, где Z_1 , Z_2 и Z_3 — двухполюсники.

В первой главе было показано, что наличие в цепи индуктивности и емкости приводит к резонансу и что в контуре при отсутствии активного сопротивления будут иметь место незатухающие колебания с частотой f_0 , равной

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (139)$$

Если двухполюсник содержит большое число отдельных индуктивностей и емкостей, то различные комбинации этих элементов могут привести к тому, что цепь будет иметь несколько резонансных частот.

Прежде чем пытаться найти число этих частот или определить характеристики такой реактивной цепи, рассмотрим простейший случай, чтобы затем перейти к более сложным цепям.

В простейшем случае плечи звена фильтра могут состоять только из одного реактивного элемента — индуктивности L или емкости C (рис. 37,а). Их реактивные сопротивления, зависимость которых от частоты ω представлена графиками, равны

$$\left. \begin{aligned} X &= j\omega L \\ X &= 1/j\omega C \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Сопротивления являются двойниками и их произведение будет постоянно, независимо от частоты.

Обозначая произведение через R^2 , получим

$$j\omega L \frac{1}{j\omega C} = \frac{L}{C} = R^2. \quad (141)$$

Если L выражено в генри, а C — в фарадах, то R^2 имеет размерность — омы в квадрате.

На рис. 37,б показаны единственно возможные соединения этих элементов. Это последовательный и параллельный колебательные контуры без активного сопротивления и, следовательно, с бесконечно большой добротностью Q^* . Кривая изменения реактивного сопротивления последователь-

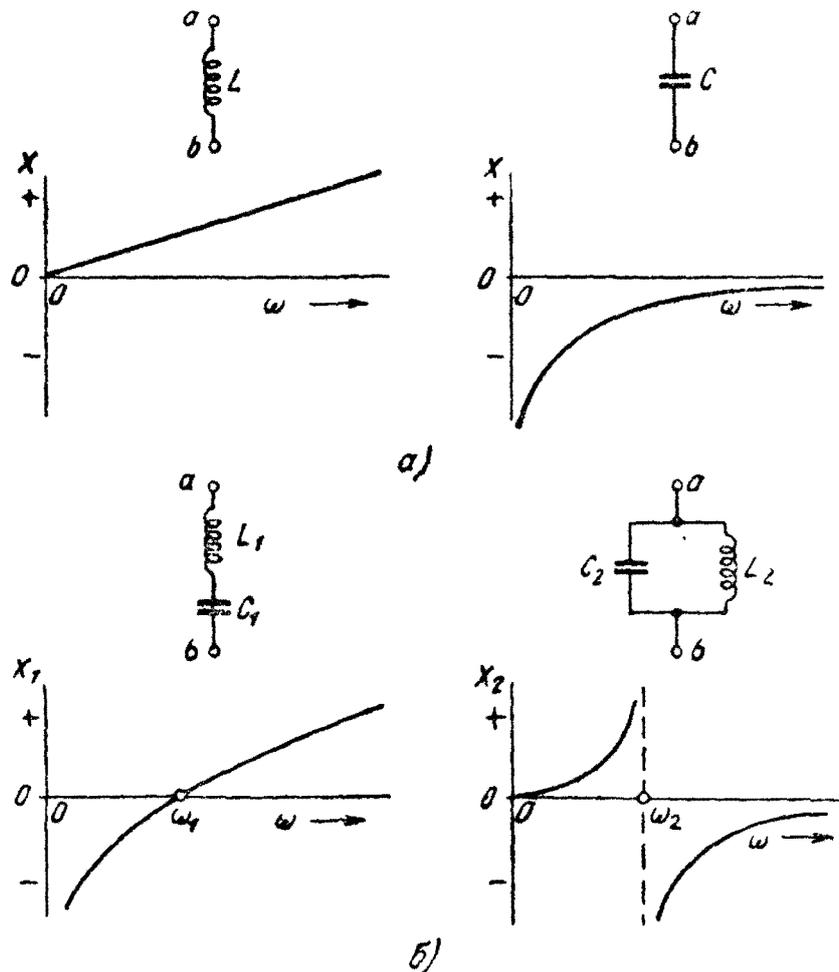


Рис. 37. Диаграммы сопротивлений реактивных двухполюсников:

а) сопротивление двухполюсника, состоящего из одного реактивного элемента; б) сопротивление двухполюсника, состоящего из двух реактивных элементов.

ного резонансного контура пересекает ось частот в „нулевой“ точке ω_1 , а кривая для параллельного резонансного контура имеет разрыв в точке ω_2 , являющейся „полюсом“ диаграммы, в которой сопротивление становится бесконечным.

* Термин „последовательный колебательный контур“, будет в дальнейшем принят для цепи, реактивные элементы-двойники которой соединены последовательно, а „параллельный контур“ при параллельном соединении реактивных элементов-двойников.

Кривые построены по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{jL_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_1^2) && \text{— для последова-} \\ &&& \text{тельного контура} \\ X_2 &= \frac{\omega}{jC_2(\omega^2 - \omega_2^2)} && \text{— для параллель-} \\ &&& \text{ного контура} \end{aligned} \right\}, \quad (142)$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$$

и

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}. \quad (143)$$

Обе эти цепи снова являются двойниками. Если соответствующие пары реактивных сопротивлений в этих цепях выбраны по величине так, что произведение их постоянно, то цепи будут полными двойниками или „обратимыми цепями“, т. е., если

$$\frac{L_1}{C_2} = \frac{L_2}{C_1} = R^2, \quad (144)$$

то сопротивления в уравнениях (142) будут взаимнообратными на всех частотах, так как $\omega_1 = \omega_2$. Таким образом, произведение X_1 и X_2 постоянно для всех частот

$$X_1 X_2 = \frac{L_1}{C_2} = R^2. \quad (145)$$

Для случая трех элементов, например, двух индуктивностей и одной емкости или двух емкостей и одной индуктивности, можно показать, что существуют только четыре возможных способа соединения их в виде двухполюсника (схемы, в которых однородные элементы соединяются последовательно или параллельно, можно соответственно упростить).

Далее, можно установить, что эти четыре возможных схемы соединения трех элементов, приведенные на рис. 38, распадаются на две группы *а), в)* и *б), г)*, при чем схемы, входящие в одну группу, являются двойниками, что можно доказать, пользуясь правилами, изложенными в предыдущих параграфах. Далее, хотя это на первый взгляд и не совсем очевидно, можно также доказать, что схемы *а)* и *б)*, *в)* и *г)* являются ограниченно-эквивалентными и имеют характеристики одинаковой формы. Их можно сделать полными двой-

никами, выбрав соответствующие значения величин входящих в них элементов, при чем их частотные характеристики будут идентичны.

Для того, чтобы пары *a)* и *б)*, *в)* и *г)* были полными двойниками, нужно так же, как и для цепей из двух элементов, взять постоянное произведение соответствующих реактивных сопротивлений. Например, если в цепях *a)* и *б)* (рис. 38) взять

$$\frac{L_1}{C_3} = \frac{L_2}{C_1} = \frac{L_3}{C_2} = R^2 = \text{const}, \quad (146)$$

то цепи будут обратимыми.

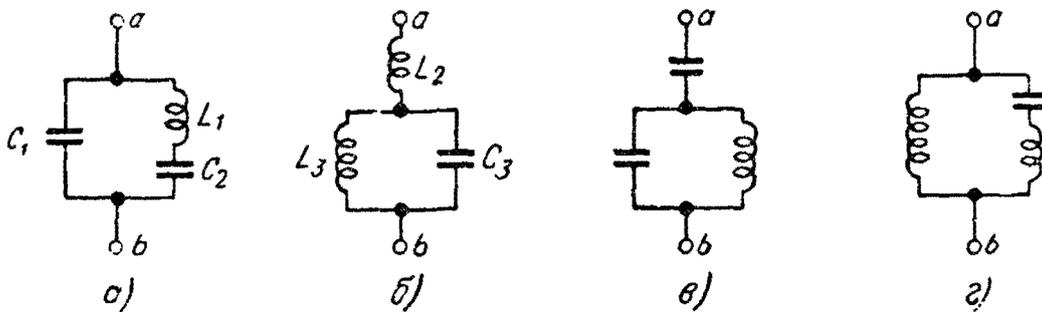


Рис. 38. Возможные схемы соединения трех реактивных элементов.

Реактивное сопротивление схемы *a)* равно

$$X_A = \frac{(1/j\omega C_1)(j\omega L_1 + 1/j\omega C_2)}{(1/j\omega C_1 + j\omega L_1 + 1/j\omega C_2)}.$$

Это выражение можно упростить

$$X_A = \frac{1}{j\omega} \frac{(1 - \omega^2 L_1 C_2)}{(C_1 + C_2 - \omega^2 L_1 C_2 C_1)}$$

и переписать в виде

$$X_A = \frac{-j}{\omega C_1} \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_2^2}, \quad (147)$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_2} \quad (148)$$

резонансная частота последовательного контура *a)*, состоящего из L_1 и C_2 , а

$$\omega_2^2 = \frac{C_1 + C_2}{L_1 \cdot C_1 \cdot C_2} \quad (149)$$

резонансная частота параллельного контура, состоящего из индуктивности L_1 и последовательно соединенных емкостей C_1 и C_2 .

Аналогично можно показать, что реактивное сопротивление цепи *б*), являющейся двойником цепи *а*), равно

$$X_B = j\omega L_2 \frac{\omega^2 - \omega_4^2}{\omega^2 - \omega_3^2}, \quad (150)$$

где

$$\omega_3^2 = \frac{1}{L_3 C_3}, \quad (151)$$

резонансная частота параллельного контура из L_3 и C_3 , а

$$\omega_4^2 = \frac{L_2 + L_3}{C_3 \cdot L_2 \cdot L_3} \quad (152)$$

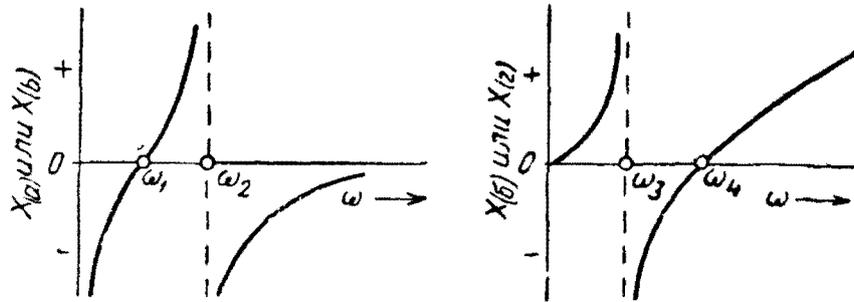


Рис. 39. Диаграммы реактивных сопротивлений двухполюсников, показанных на рис. 38.

резонансная частота параллельного контура, в одной ветви которого включена емкость C_3 , а в другой параллельно соединенные индуктивности L_2 и L_3 (следует иметь в виду, что точки *а* и *б* подключаются к некоторому внешнему источнику).

Если выполнено условие (146), то нулевая точка одной цепи (резонанс напряжений) будет соответствовать „полюсу“ другой цепи (резонансу токов) и наоборот, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_3 \\ \omega_2 &= \omega_4 \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

При этом условии произведение реактивных сопротивлений цепей *а*) и *б*) будет постоянным. Из уравнений (147) и (150) получается

$$X_A X_B = L_2 / C_3. \quad (154)$$

На рис. 39 приведены диаграммы изменения этих сопротивлений в зависимости от частоты ω . Диаграммы применимы также для цепей-двойников *в*) и *г*) (рис. 38).

Из сравнения выражений для реактивных сопротивлений цепей, состоящих из двух (142) и (143) и трех элементов (147) и (150), видно, что форма диаграммы этих сопротивлений полностью определяется значениями $\omega_1, \omega_2 \dots$ и т. д. (полюсами и нулевыми точками) и постоянной величиной одного из элементов (индуктивности или емкости).

Для простых последовательных и параллельных контуров в большинстве случаев могут быть легко выведены выражения для реактивного сопротивления, аналогичные (147) и (150) на основании конфигурации цепи, как это было сделано выше. Однако, для более сложных цепей это не всегда возможно. В таких случаях форма диаграммы реактивного сопротивления для цепи, состоящей из N элементов (не содержащей последовательно или параллельно соединенных одинаковых элементов), может быть выведена на основании теоремы, являющейся распространением результатов, полученных для цепей из двух и трех элементов, на цепи, состоящие из любого числа реактивных элементов. Согласно этой теореме диаграмма реактивного сопротивления цепи полностью определяется положением полюсов и нулевых точек по оси частот* и величиной одного из элементов. Эта теорема утверждает далее, что диаграмма будет иметь одну из четырех форм, показанных на рис. 40, причем, если N четное, то диаграмма будет иметь форму *а)* или *б)*, а если N нечетное, то форму *в)* или *г)*.

С увеличением числа элементов N , число возможных способов соединения их растет очень быстро, однако, для данного числа N диаграмма сопротивления может относиться к одной из двух групп. Все цепи, относящиеся к одной группе, должны быть ограниченно-эквивалентными и являются двойниками цепи другой группы. Если N четное, то характеристики одной группы должны иметь форму *а)*, а другой — форму *б)*. Эти характеристики взаимнообратны. Аналогично, при N нечетном характеристики будут иметь вид *в)* или *г)*, которые также взаимнообратны. Общее число полюсов и нулевых точек будет на единицу меньше числа элементов N (четного или нечетного), не считая точек $\omega = \infty$ или $\omega = 0$. Крутизна этих частотных характеристик сопротивления цепей $dX/d\omega$ везде положительна, поэтому полюсы и нулевые точки должны чередоваться.

Аналитические выражения для этих характеристик имеют следующий вид:

* Не включая точек $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

Для случая $X=0$ при $\omega=0$ (рис. 40, *а* и *в*),

$$X = j\omega H \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)\dots}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)(\omega^2 - \omega_5^2)\dots}, \quad (155)$$

а для случая $X=-\infty$ при $\omega=0$ (рис. 40, *б* и *г*)

$$X = -j \frac{H}{\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)(\omega^2 - \omega_5^2)\dots}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)\dots}, \quad (156)$$

где H — постоянная, которая может принимать значение L или $1/C$. Множители, стоящие в числителе, дают частоты нулевых точек, а множители в знаменателе — частоты полюсов. Общее число сомножителей в выражениях (155) или (156) на единицу меньше числа реактивных элементов N .

Реактивные сопротивления, определяемые этими уравнениями, будут точно взаимнообратными, если частоты полюсов одного будут равны частотам нулевых точек другого (конечно, при условии, что число элементов N будет одинаковым в обоих случаях). На рис. 40 интервалы между соседними полюсами и нулями взяты равномерными, но это сделано только для удобства и большей наглядности. Можно отметить, что диаграммы реактивных сопротивлений для простых цепей из двух и трех элементов (рис. 37 и 39) являются частными случаями диаграмм общего вида (рис. 40). Точно так же выражения для реактивных сопротивлений (142), (147) и (150) являются частными случаями общих выражений (155) и (156).

Если двухполюсник содержит четное число элементов N , то в нем должно быть одинаковое число емкостей C и индуктивностей L . Если же N нечетное, то будет на одну индуктивность L или емкость C больше. Всегда можно изобразить эквивалентную схему для цепи, состоящей из реактивных элементов, в виде одной из четырех комбинаций, приведенных на рис. 41: либо *а*) и *б*) при N четном, либо *в*) и *г*) при N нечетном. Такие простые формы цепей состоят из цепочек последовательных и параллельных контуров. Они являются хорошей иллюстрацией к диаграммам рис. 40, так как последовательное и параллельное соединение элементов нагляднее, чем какое-либо другое. Частоты резонанса токов или напряжений настроенных цепей, соответствующие нулевым точкам и полюсам на диаграмме рис. 40, обозначены на рис. 41 через $\omega_1, \omega_3, \omega_5 \dots$ и т. д. Звенья цепей рис. 41, *а* и *б* состоят из четного числа элементов и являются цепями-двойниками, что можно доказать, поль-

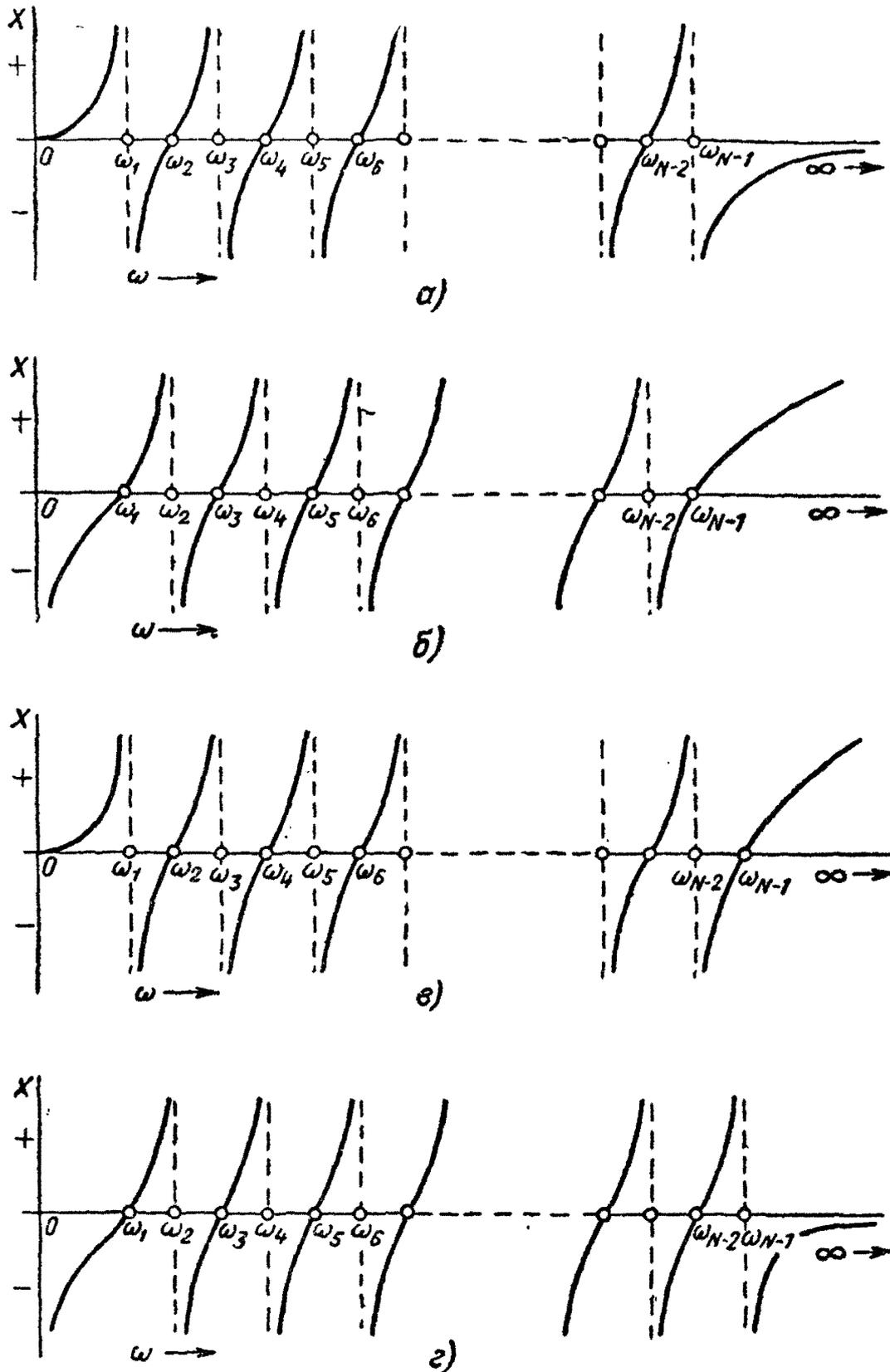


Рис. 40. Четыре возможных типа диаграмм сопротивления реактивных двухполюсников (не содержащих активного сопротивления):
 а) N четное, $X_0=0$, $X_\infty=0$; б) N четное, $X_0=-\infty$, $X_\infty=+\infty$; в) N нечетное, $X_0=0$, $X_\infty=+\infty$; г) N нечетное, $X_0=-\infty$, $X_\infty=0$.

зуюсь правилами образования цепей-двойников, рассмотренными в § 28. Они будут полностью эквивалентны при условии, что частоты полюсов $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ одних звеньев будут равны частотам нулевых точек других.

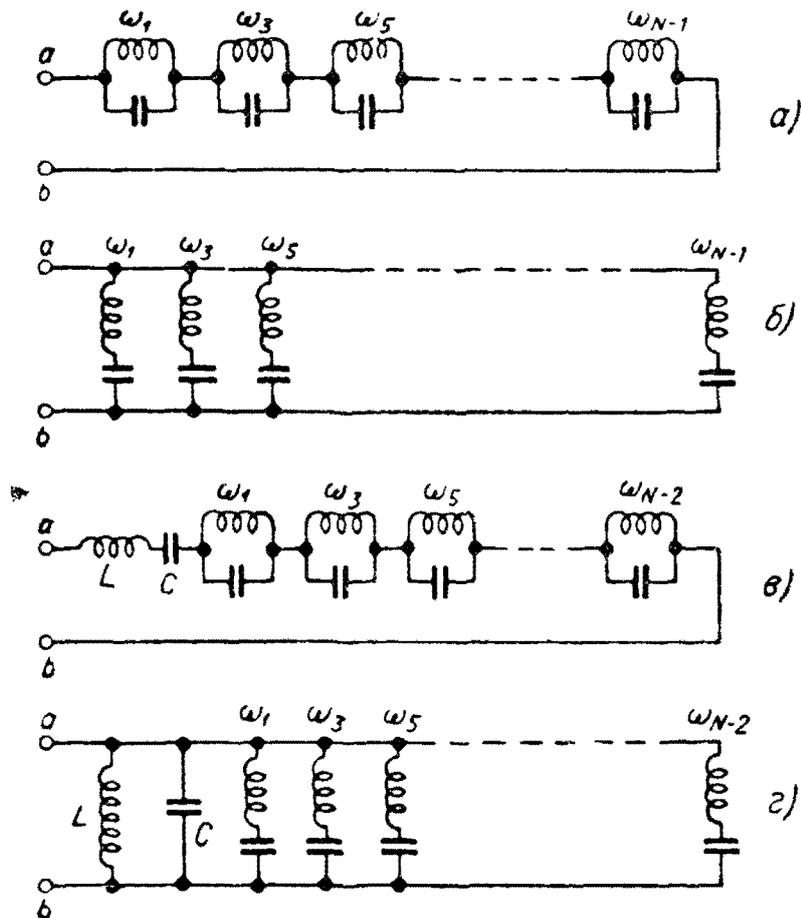


Рис. 41. Четыре основных формы сложных цепей, состоящих из двухполюсников, диаграммы сопротивлений которых показаны на рис. 40 (при N нечетном в схемах в и г какой-либо из элементов, L или C , должен отсутствовать):

- а) N четное, $X_0=0, X_\infty=0$; б) N четное, $X_0=-\infty, X_\infty=+\infty$;
 в) N нечетное; если $C=\infty$, то $X_0=0, X_\infty=+\infty$, если $L=0$, то $X_0=-\infty, X_\infty=0$;
 г) N нечетное; если $C=0$, то $X_0=0, X_\infty=-\infty$, если $L=\infty$, то $X_0=-\infty, X_\infty=0$.

То же самое справедливо для цепей рис. 41, в и г, состоящих из нечетного числа элементов N . Следует помнить, что зажимы a, b должны быть замкнуты на внешнюю цепь, так как только в этом случае сопротивление цепи имеет рассмотренное выше значение.

Иногда бывает полезно уметь определить число видов колебаний в цепи, состоящей из N реактивных элементов. Это определяется числом полюсов и нулевых точек на диа-

грамме реактивного сопротивления цепи. Если цепь приведена после упрощений к простой форме, то частоты колебаний определяются по виду цепи. Очень важно, чтобы число элементов цепи было сведено к минимуму. Имеющиеся в цепи взаимные индуктивности следует заменить Т-образными или П-образными эквивалентными соединениями (рис. 35,б).

Форма диаграммы реактивного сопротивления всегда может быть определена после того, как число элементов цепи сведено к минимуму. Значения X при $\omega=0$ и $\omega=\infty$ могут быть определены по внешнему виду цепи, а число элементов в цепи сосчитано. Число полюсов и нулевых точек будет $N-1$.

30. Симметричные и асимметричные характеристики

Необходимо познакомиться с классификацией характеристик полосовых фильтров и других цепей, предназначенных для передачи амплитудно-модулированных колебаний, по степени их асимметрии. Для примера на рис. 42 показаны ха-

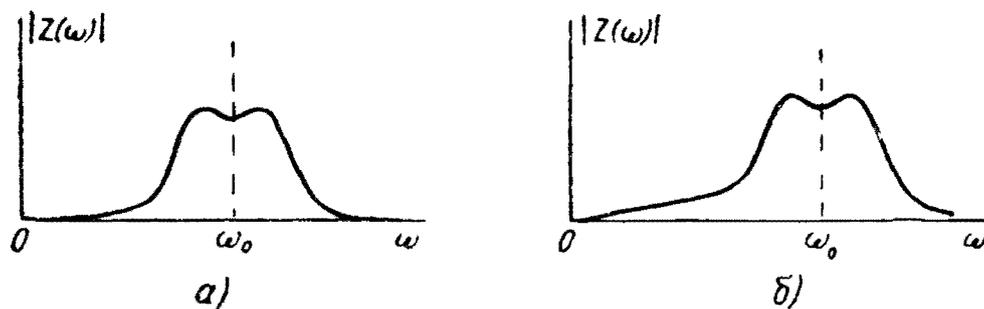


Рис. 42. Характеристики полосовых фильтров:
а) симметричная характеристика; б) асимметричная характеристика.

рактеристики двух полосовых фильтров (изображены только модули передаточных характеристик). Характеристику а) можно считать симметричной относительно средней частоты ω_0 , а характеристика б) имеет заметную асимметрию. Позднее будет показано, что характеристика а) будет тем симметричнее относительно ω_0 , чем меньше отношение ширины полосы пропускания фильтра к средней частоте.

Цепь из последовательно или параллельно соединенных элементов, из которых образуются Т-образные или П-образные звенья любого фильтра, должны иметь характеристики общего вида, показанные на рис. 40. Если число элементов в цепи четное, то диаграммы реактивных сопротивлений а) или б), вообще говоря, симметричны, так как при $\omega=0$ и $\omega=\infty$ окажутся нулевые точки или полюсы. Если число

элементов в цепи нечетное, то получается некоторая асимметрия, так как при $\omega=0$ окажется нулевая точка, а при $\omega=\infty$ — полюс или наоборот. Следует, может быть, пояснить, в каком смысле здесь применяется термин „симметрия“, так как он связан с некоторой центральной осью. Симметрия, о которой здесь идет речь, будет понятнее, если рассмотреть простую реактивную цепь, состоящую из нескольких элементов, часто применяемую в реальных фильтрах. Например, последовательные и параллельные плечи Π -образного звена фильтра (рис. 43,б) имеют диаграмму реактивного сопротивления, показанную на рис. 37,б для цепи из двух элементов. Эти характеристики приблизительно обладают симметрией 2-го рода относительно ω_1 и ω_2 , и если эти частоты будут одинаковыми и равными ω_0 , то плечи становятся полностью эквивалентными и фильтр носит название фильтра типа K . Если реактивные сопротивления последовательного и параллельного плечей изменяются симметрично относительно ω_0 (средняя частота), то характеристика фильтра будет приблизительно симметрична относительно этой частоты (рис. 42,а).

Это можно доказать, если выразить характеристику передаточного сопротивления через реактивные сопротивления последовательного и параллельных плеч X_1 , X_2 и X_3 .

В общем случае, представленном скелетной схемой на рис. 43,а, б, можно написать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} u &= i_1 X_3 \\ i &= i_1 + i_2 \\ \frac{i_1}{i_2} &= \frac{X_2}{X_1 + X_3} \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

Исключая i_1 и i_2 , получаем выражение для передаточного сопротивления

$$\frac{u}{i} = \frac{X_2 X_3}{X_1 + X_2 + X_3} \quad (158)$$

Если все плечи содержат четное число элементов, то значения X_1 , X_2 и X_3 на всех частотах выше ω_0 (например, $\omega_0 + \omega$) положительны и будут иметь приблизительно равные отрицательные значения $-X_1$, $-X_2$, $-X_3$ на частотах ($\omega_0 - \omega$), меньших ω_0 . Но значение u/i согласно выражению (158) не меняет своей величины и только изменяет знак, когда X_1 , X_2 и X_3 становятся отрицательными. Таким образом диаграмма модуля передаточного сопротивления будет симметрична, а диаграмма фазы — обладать симметрией 2-го рода

относительно средней частоты ω_0 . Симметрия становится тем точнее, чем ближе частота ω к ω_0 .

Если последовательное плечо П-образного звена (рис. 43,б) содержит нечетное число элементов, то его реактивное сопротивление X_1 не будет одинаковым при $\omega_0 + \omega$ и $\omega_0 - \omega$; поэтому выражение u/i будет асимметричным относительно ω_0 . Например, передаточное сопротивление П-образного звена фильтра, показанного на рис. 43,г, последовательное плечо

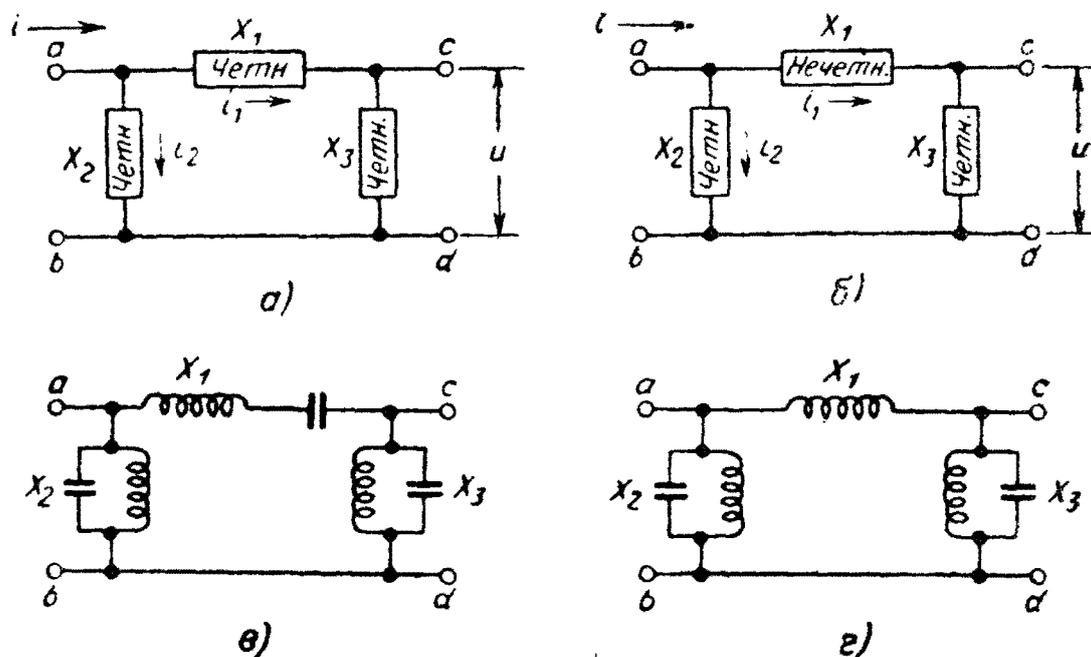


Рис. 43. П-образное звено полосового фильтра с четным и нечетным числом элементов в плечах:

а) с четным числом элементов в последовательном и параллельных плечах; б) с четным числом элементов в параллельных и нечетным в последовательном плечах; в) звено полосового фильтра типа К (четное число элементов в последовательном и параллельных плечах); г) звено полосового фильтра (нечетное число элементов в последовательном и четное в параллельных плечах).

которого имеет диаграмму реактивного сопротивления, приведенную на рис. 37,а, не будет изменяться симметрично относительно какой-либо частоты. Таким образом, хотя сопротивление параллельных плеч будет изменяться симметрично относительно ω_0 , сопротивление последовательного плеча будет изменяться асимметрично, вследствие чего результирующая характеристика передаточного сопротивления не может быть симметричной относительно средней частоты ω_0 .

Почти симметричная характеристика рис. 42,а типична для фильтра типа К, в котором как последовательные, так и параллельные плечи содержат четное число элементов, а асимметричная характеристика (рис. 42,б) относится к фильтру, последовательные звенья которого содержат чет-

ное, а параллельные — нечетное число элементов или наоборот (рис. 43,б). Однако, если плечи звеньев фильтра содержат четное число элементов, но не являются полными двойниками, то такой фильтр не относится к фильтрам типа K и характеристика его не будет почти симметричной.

Термин „почти симметричная“ характеристика применялся здесь по следующим соображениям. Диаграмма реактивных сопротивлений (рис. 37,б и другие) не точно симметричны относительно средней частоты, так как шкала частот простирается от нуля до бесконечности, но если их вычертить в логарифмическом масштабе по оси частот, то их геометрическая форма будет строго симметрична. Небольшая асимметрия частотных характеристик фильтра, обусловленная этим фактором, может быть названа „внутреннеприсущей асимметрией“. Следует заметить, что все фильтры нижних частот можно рассматривать как полосовые фильтры с нулевой средней частотой ($\omega_0 = 0$), и их характеристики, вычерченные в сопряженной форме, как на рис. 33,2, точно симметричны относительно нулевой частоты (см. § 25 главы III).

31. Симметрия характеристик фильтра в логарифмическом масштабе

Устранение незначительной асимметрии характеристик полосового фильтра типа K при изображении в логарифмическом масштабе по оси частот можно лучше всего показать на примере одиночного настроенного контура простейшей формы, которую может иметь плечо фильтра (рис. 43,в).

Характеристики последовательного и параллельного контуров без активного сопротивления приведены на рис. 37,б с линейным масштабом по оси частот. Они определяются уравнением (142). Если в это уравнение подставить ω_0 вместо частоты резонанса токов ω_1 и резонанса напряжений ω_2 , то получим

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{jL_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) \text{ — для последовательного контура} \\ X_2 &= \frac{\omega}{jC_2 (\omega^2 - \omega_0^2)} \text{ — для параллельного контура} \end{aligned} \right\} (159)$$

Характеристики вычерчены в относительных величинах (ω/ω_0) в логарифмическом масштабе на рис. 44,а и б. В этом масштабе любое линейное расстояние x от выбранного начала координат ($\omega = \omega_0$) выражается как

$$x = \ln \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (160)$$

так что

$$\omega = \omega_0 e^x. \quad (161)$$

Подстановка выражения (161) в (159) дает

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= j\omega_0 L_1 (e^x - e^{-x}) \text{ — для последовательного контура} \\ X_2 &= \frac{1}{j\omega_0 C_2 (e^x - e^{-x})} \text{ — для параллельного контура} \end{aligned} \right\} (162)$$

Оба эти выражения симметричны относительно x и диаграммы реактивных сопротивлений (рис. 44) также симметричны.

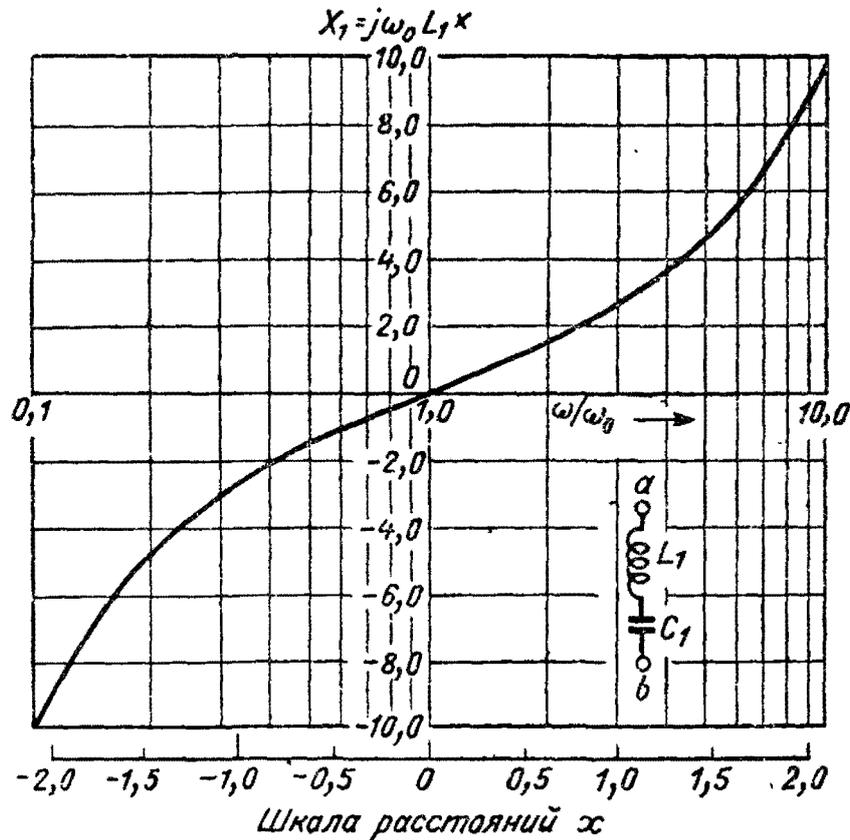


Рис. 44а. Диаграмма реактивного сопротивления последовательного колебательного контура в логарифмическом масштабе по оси частот.

Отсутствие точной симметрии характеристик фильтра может не иметь серьезного практического значения, пока эта асимметрия мала. Но если она становится большой, как например, для сравнительно широкополосных фильтров, боковые частоты модулированных колебаний будут искажаться асимметрично относительно ω_0 .

Такие искажения могут иметь большое значение и будут подробнее рассмотрены в главе VII.

32. Влияние поглощения энергии на форму характеристик

При расчете фильтров частотные характеристики идеализируются в том смысле, что не учитывается влияние поглощения (рассеяния) энергии. Форма частотных характеристик фильтра может быть определена, если известны характеристики отдельных последовательных плеч фильтров, на основании приведенной выше теоремы. В этом отношении теорема является очень ценной. Однако в той формулировке, в какой она была изложена, эта теорема верна только для реактивных цепей без потерь.

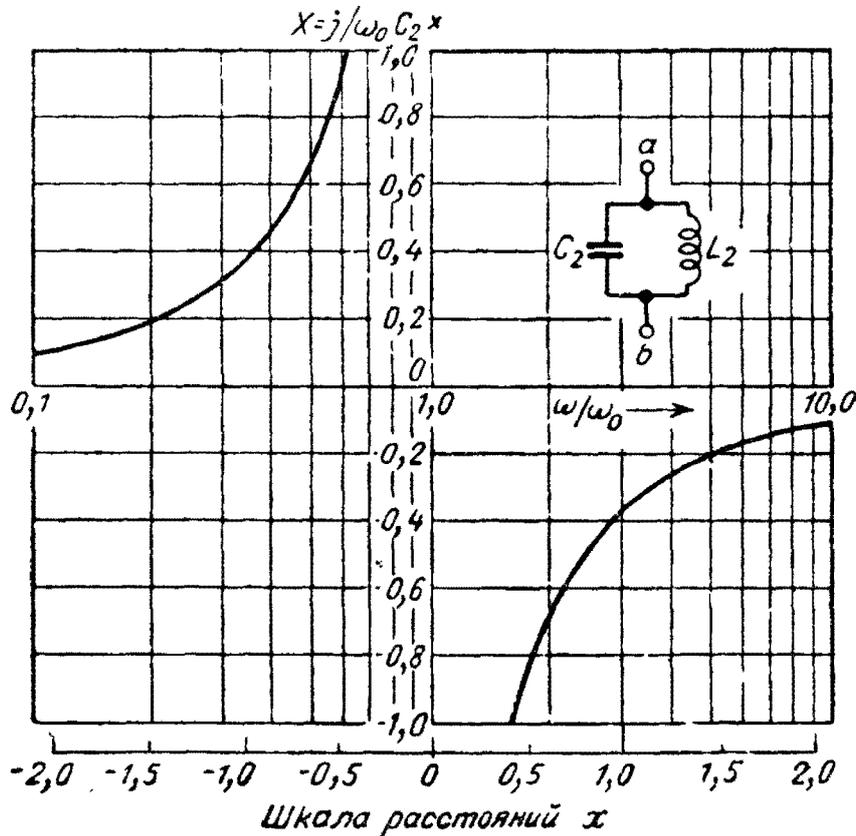


Рис. 446. Диаграмма реактивного сопротивления параллельного колебательного контура в логарифмическом масштабе по оси частот.

Если потери в отдельных элементах на практике имеют существенную величину, то теорема будет верна лишь качественно в том смысле, что диаграмма полного сопротивления цепи, состоящей из нескольких индуктивностей и емкостей, будет иметь соответствующее число точек резонанса токов и напряжений, расположенных попеременно на оси частот. При этом полное сопротивление не будет принимать значений, равных бесконечности, как это имело место для рассмотренного случая цепи без потерь (рис. 37, 39, 40)

и, кроме того, частоты резонанса цепи с потерями могут не соответствовать точно частотам резонанса цепи без потерь.

Степень отклонения формы характеристики от идеальной зависит от величины потерь в элементах цепи и оценивается значением добротности Q этих элементов. В § 5 главы I добротность Q рассматривалась как отношение запасаемой энергии в отдельном элементе к рассеиваемой энергии. Там же было показано влияние величины Q на свободные колебания в контуре (рис. 8). Влияние ее на частотные

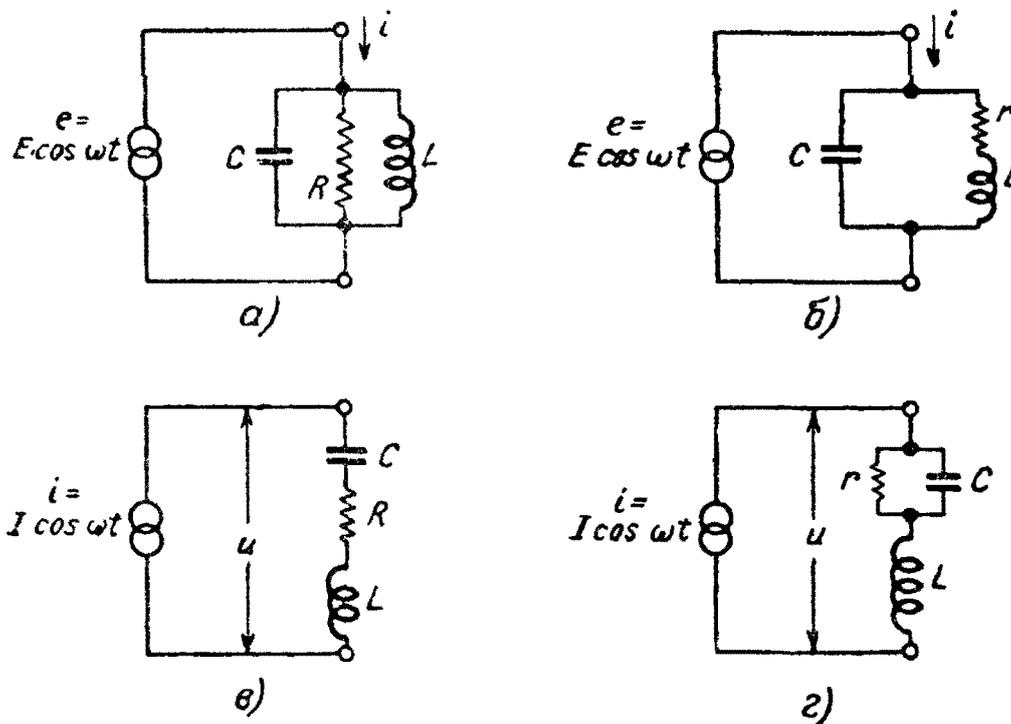


Рис. 45. Схемы колебательных контуров с активным сопротивлением (с потерями).

Параллельные контуры а) и б) и последовательные контуры в) и г) являются цепями-двойниками

характеристики установившегося режима также имеет важное значение, и в связи с этим интересно рассмотреть семейство универсальных резонансных кривых одиночного колебательного контура.

На рис. 45 представлены четыре общие схемы колебательного контура. Схемы в) и г) являются двойниками (в отношении конфигурации) цепей а) и б) соответственно.

Схема а)

Проводимость $1/Z_a$ этого параллельного контура выражается как

$$1/Z_a = 1/R + j\omega C + 1/j\omega L \quad (163)$$

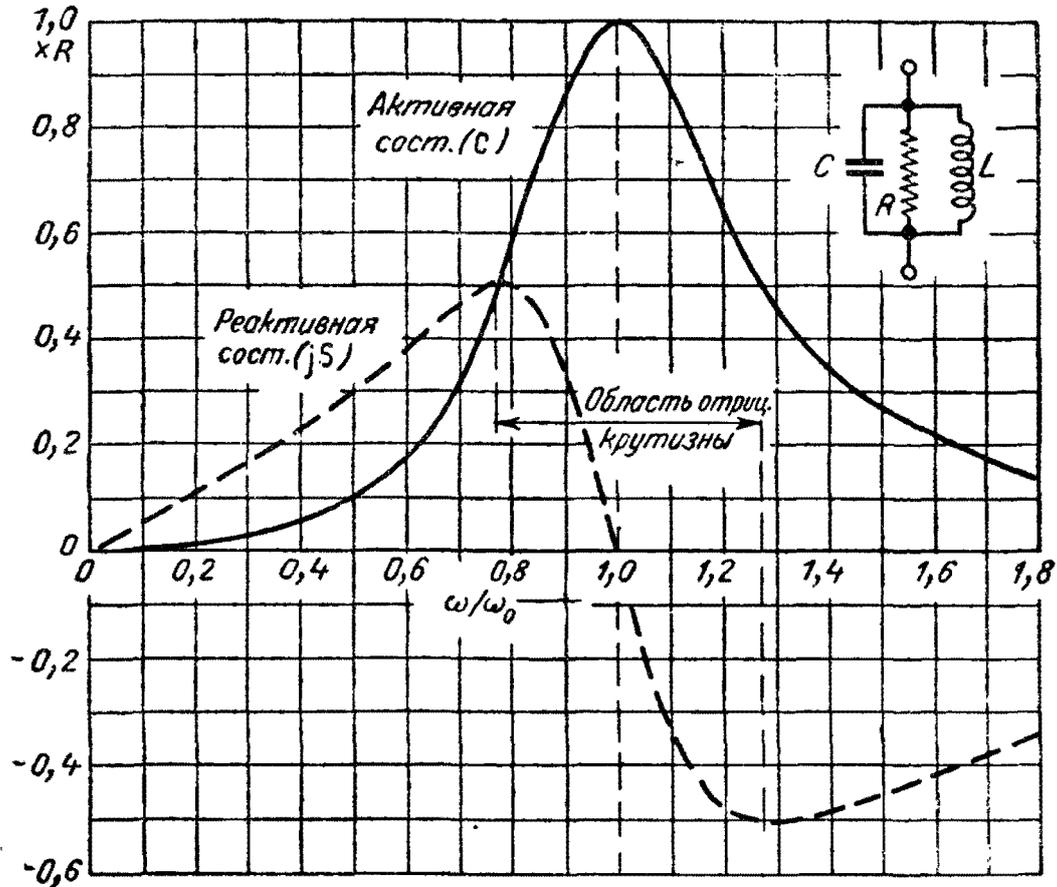


Рис. 46. Диаграммы активной и реактивной составляющих полного сопротивления контура рис. 45 а при $Q=2$.

откуда

$$Z_a = \frac{1/R - j(\omega C - 1/\omega L)}{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2} = C + jS, \quad (164)$$

где C — действительная и S — мнимая части полного сопротивления Z_a . Модуль и фазовый угол его равны.

Модуль

$$|Z_a| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}. \quad (165)$$

Фазовый угол

$$\varphi_a = \text{arctg} | -Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) |, \quad (166)$$

где

$$\omega_0^2 = 1/LC \text{ и } Q = \omega_0 CR. \quad (167)$$

Легко видеть, что $\omega_0 CR$ равно добротности Q настроенного параллельного колебательного контура, согласно определения Q , данного в первой главе, так как

$$(\omega_0 CR)^2 = CR^2/L = Q^2. \quad (168)$$

Уравнения (165) и (166) выражают также проводимость $1/Z_c$ (модуль и фазовый угол) эквивалентной цепи b .

На рис. 46 в качестве примера изображены кривые действительной S и мнимой jS составляющих $Z_a (=1/Z_c)$ для частного значения $Q=2$ на резонансной частоте. Кривая реактивного сопротивления имеет, в общем, такую же форму, как и для цепи без потерь (рис. 37,б) даже при столь низ-

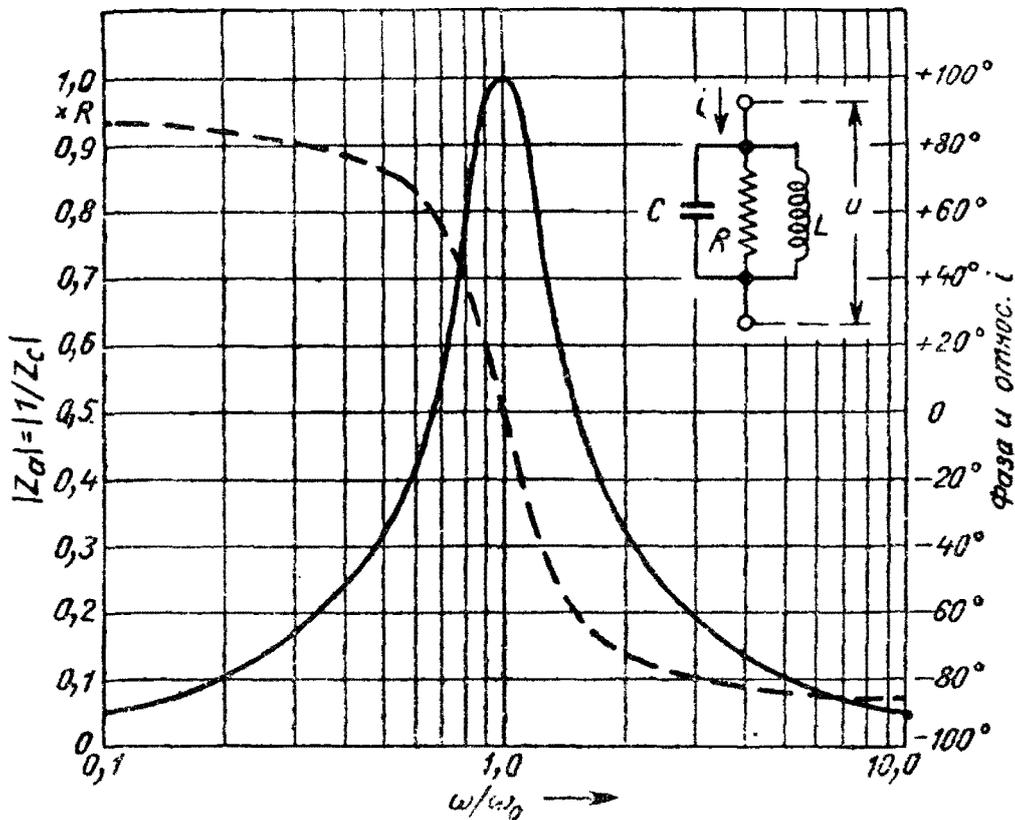


Рис. 47. Амплитудная и фазовая характеристики колебательного контура с потерями. Характеристики симметричны в логарифмическом масштабе.

ком значении Q^* , с той лишь разницей, что она не уходит в бесконечность в точке резонанса, а имеет конечное значение и отрицательную крутизну $dX/d\omega$ около этой точки. Как бы ни были малы потери в цепи, они всегда снижают реактивное сопротивление до конечной величины и приводят к отрицательной крутизне $dX/d\omega$ характеристики в точке резонанса.

Если графики модуля и фазового угла (165) и (166) вычертить в логарифмическом масштабе по оси частот, они будут симметричны относительно ω_0 (рис. 47), что можно

* Такие низкие значения Q встречаются в телевизионных и других схемах, где требуется широкая полоса пропускания.

показать при подстановке в эти уравнения $\omega = \omega_0 e^x$, как и в предыдущем параграфе.

Чем выше значение Q , тем „острее“ будет график модуля. Существует простая зависимость между величиной Q и шириной полосы $\Delta\omega$ этой кривой, измеренной на уровне $1/\sqrt{2}$ от максимальной амплитуды при $\omega = \omega_0$.

Подстановка в уравнение (165) $|Z_a| = R/\sqrt{2}$ дает

$$1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2 = 2$$

или

$$\omega^2 - \omega_0\omega/Q - \omega_0^2 = 0.$$

Разность корней этого уравнения дает ширину полосы

$$\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega = \omega_0/Q. \quad (169)$$

Соотношение (169) дает возможность просто оценить величину Q цепи по графику. Оно справедливо для такого типа контуров при любых, как угодно малых значениях Q .

Схема б)

Полное сопротивление контура, в одной ветви которого включено активное сопротивление (рис. 45,б), равно

$$Z_b = \frac{(r + j\omega L) \cdot 1/j\omega C}{r + j\omega L + 1/j\omega C}.$$

Это выражение можно представить в виде уравнений для модуля и фазового угла

$$\left. \begin{aligned} |Z_b| &= r \sqrt{\frac{1 + Q^2 \cdot \omega^2/\omega_0^2}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (1/Q^2)\omega^2/\omega_0^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi_b &= \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \left[Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) - 1 \right] \end{aligned} \right\}, \quad (170)$$

где

$$Q = 1/\omega_0 C r \text{ и } \omega_0^2 = 1/LC. \quad (171)$$

Следует заметить, что Q для схемы б) является обратной величиной Q для схемы а) [уравнение (167)]. Это объясняется тем, что элементы L , C и R в схеме а) соединены параллельно, тогда как в схеме б) L , C и r соединены последовательно между собой*.

* Правильность выражения для Q цепи типа б) можно проверить, положив $r=0$. При этом Q должно превращаться в ∞ .

Уравнения (170) выражают также модуль проводимости схемы *з*), являющейся двойником схемы *б*). Из этих уравнений можно видеть, что графики модуля и фазового угла асимметричны относительно $\omega/\omega_0 = 1$, в противоположность графикам для схем *а*) и *в*). Только в том случае, если активное сопротивление в контуре включено симметрично относительно L и C графики будут почти симметричны (при линейном масштабе по оси частот). На рис. 48 приведены

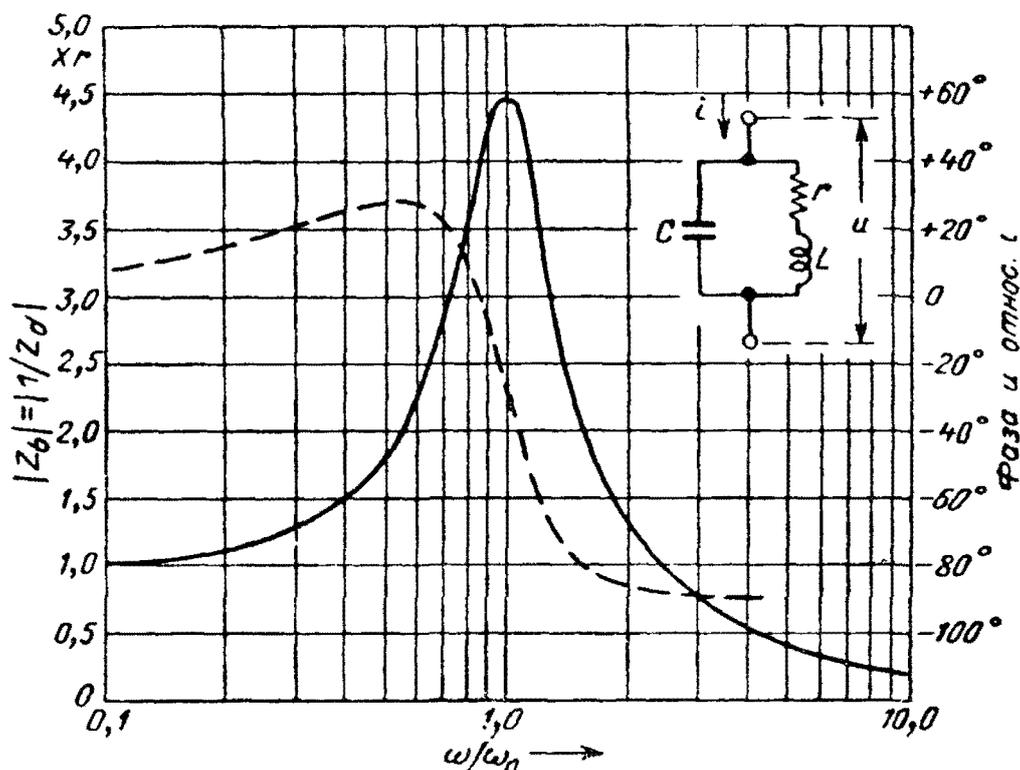


Рис. 48. Амплитудная и фазовая характеристики асимметрично нагруженного колебательного контура при $Q=2$.

графики модуля и фазового угла для случая $Q=2$, причем ясно заметна их асимметричность. Чем выше значение Q , тем симметричнее будут кривые в логарифмическом масштабе по оси частот. В предельном случае, при $Q \rightarrow \infty$ графики обеих схем (рис. 47 и 48) совпадают с графиками для цепи без потерь (рис. 44).

33. Преобразование фильтра нижних частот в эквивалентный полосовой фильтр

В § 16 главы II была показана эквивалентность графиков огибающей и колебаний, модулированных по амплитуде по закону этой огибающей, заключающаяся в том, что спектры их идентичны, но спектр огибающей симметричен относи-

тельно нулевой частоты, а спектр модулированных колебаний — относительно несущей (рис. 18 и 19).

Частотные характеристики цепей подобны частотным спектрам в том отношении, что они представляют модуль и фазовый угол в функции от частоты. Но эти характеристики являются непрерывными кривыми и, следовательно, подобны только непрерывным спектрам, например, спектрам одиночных импульсов. Характеристика фильтра нижних частот, представленная в виде сопряженных составляющих, симметрична относительно нулевой частоты (рис. 33, з). В то

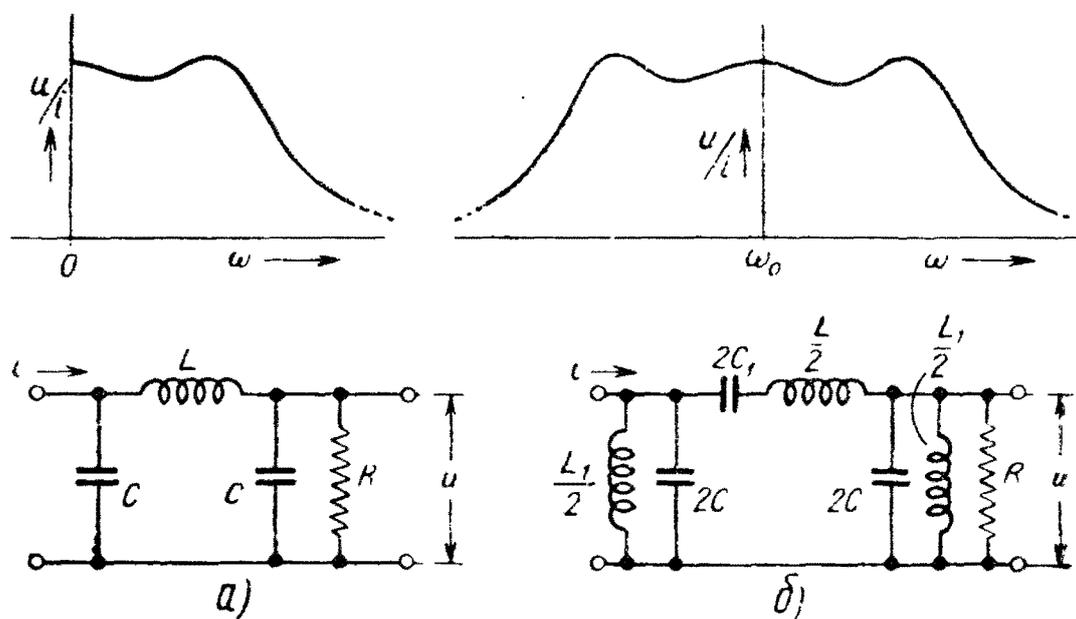


Рис. 49. Фильтр нижних частот (а) и эквивалентный ему полосовой фильтр (б).

же время в двух последних параграфах было показано, что характеристики некоторых полосовых фильтров симметричны относительно средней частоты (если не считать внутреннеприсущей им асимметрии при линейном масштабе по оси частот).

Все это приводит к мысли о том, что может существовать какая-то связь между фильтрами нижних частот и полосовыми фильтрами (или фильтрами верхних частот и заградительными фильтрами), имеющими идентичные характеристики, симметричные относительно нулевой частоты и некоторой несущей частоты соответственно. Эта связь иногда называется „аналогией“ или „эквивалентностью фильтра частот и полосового фильтра“.

Рис. 49 иллюстрирует сказанное. В левой части рисунка а) показано звено фильтра нижних частот и его амплитудная

характеристика, а в правой части б) — эквивалентное звено полосового фильтра и его характеристика, симметричная относительно несущей частоты ω_0 . Эквивалентное звено полосового фильтра получено из схемы звена фильтра нижних частот путем включения последовательно с каждой индуктивностью конденсатора и параллельно каждому конденсатору индуктивности. Величины дополнительных элементов должны быть такими, чтобы образованные последовательные и параллельные плечи были настроены на одну частоту ω_0 , т. е.

$$1/LC_1 = 1/L_1C = \omega_0^2. \quad (172)$$

Образованное таким образом звено полосового фильтра будет иметь полосу частот, ширина которой (включая обе боковые полосы) равна ширине полосы звена фильтра нижних частот, при условии, что индуктивности в нем уменьшены вдвое, а емкости увеличены в два раза и сохранена резонансная частота ω_0 всех плеч. Значения активного сопротивления остаются неизменными. Собственные колебания таких эквивалентных цепей были рассмотрены в главе I.

Для доказательства выказанного выше положения достаточно рассмотреть соотношения между отдельными элементами L или C и соответствующими им последовательными или параллельными контурами — аналогами. В предыдущем параграфе было показано, что симметрично нагруженный контур (рис. 45,а и в) имеет характеристики, симметричные относительно частоты ω_0 и что только характеристики такой цепи могут быть „приведены к нулевой частоте“. Ясно также, что цепи, представленные на рис. 45,б и г (с асимметричными характеристиками), не могут быть образованы путем добавления к одному какому-либо элементу дополнительных емкостей или индуктивностей, как это было сделано в предыдущем случае.

Пользуясь приведенными выше правилами, можно для любой линейной цепи образовать эквивалентное звено полосового фильтра. Однако обратное положение не всегда справедливо. Только цепи, состоящие из контуров вида рис. 45,а или в (величина Q их может быть и бесконечно большой), настроенных на одну частоту ω_0 , могут иметь аналоги в виде звеньев фильтра нижних частот.

На рис. 50 изображены последовательный и параллельный контуры и их аналоги — фильтры нижних частот.

Полное сопротивление последовательного резонансного контура, состоящего из r , $L/2$ и $2C$, равно

$$r + j(\omega L/2) - (1/2\omega C), \quad (173)$$

а аналога этой цепи — фильтра нижних частот, состоящего из последовательно соединенных r и L , равно

$$r + j\omega L. \quad (174)$$

Действительная часть их (r) одинакова и не зависит от частоты.

Остается исследовать возможность создания одинаковых реактивных составляющих, симметричных относительно нулевой частоты и частоты ω_0 , соответственно. Диаграммы этих реактивных сопротивлений также приведены на рис. 50.

Пусть ω_1 и ω_2 — две частоты, при которых реактивные сопротивления X резонансного контура равны по величине и противоположны по знаку

$$X = -\frac{j}{2} \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right) = +\frac{j}{2} \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right). \quad (175)$$

Подстановка $\omega_0^2 = 1/LC$ дает

$$2X = -j\omega_0 L \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = j\omega_0 L \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right). \quad (176)$$

Это выражение упрощается и приводится к $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$. Таким образом, ω_0 является средним геометрическим из ω_1 и ω_2 .

Подстановка в (176) $\omega_1 = \omega_0^2 / \omega_2$ дает

$$\left. \begin{aligned} 2X &= -j\omega_0 L \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0^2/\omega_2} \right), \\ \text{или} \\ X &= j \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} L \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Получилось выражение для реактивного сопротивления индуктивности $L/2$ (рис. 50,а) на частоте $(\omega_2 - \omega_1)$ являющееся результатом „приведения частоты ω_0 к нулевой частоте“.

Характеристика может быть приведена к нулевой частоте даже, если допустить, что ω_0 есть среднее арифметическое, а не среднее геометрическое частот ω_1 и ω_2 . В результате такого допущения получится линейная характеристика реактивного сопротивления настроенной цепи, показанная на рис. 50,б пунктирной линией. Это допущение возможно в большинстве практических случаев, когда величина $(\omega_2 - \omega_1)$ мала по сравнению с ω_0 , т. е. в случаях сравнительно узкой полосы частот.

То же доказательство применимо и к параллельному контуру (рис. 50,б) и его эквиваленту, так как они являются цепями-двойниками только что рассмотренных цепей. Реактивное сопротивление X будет соответствовать реактивной проводимости.

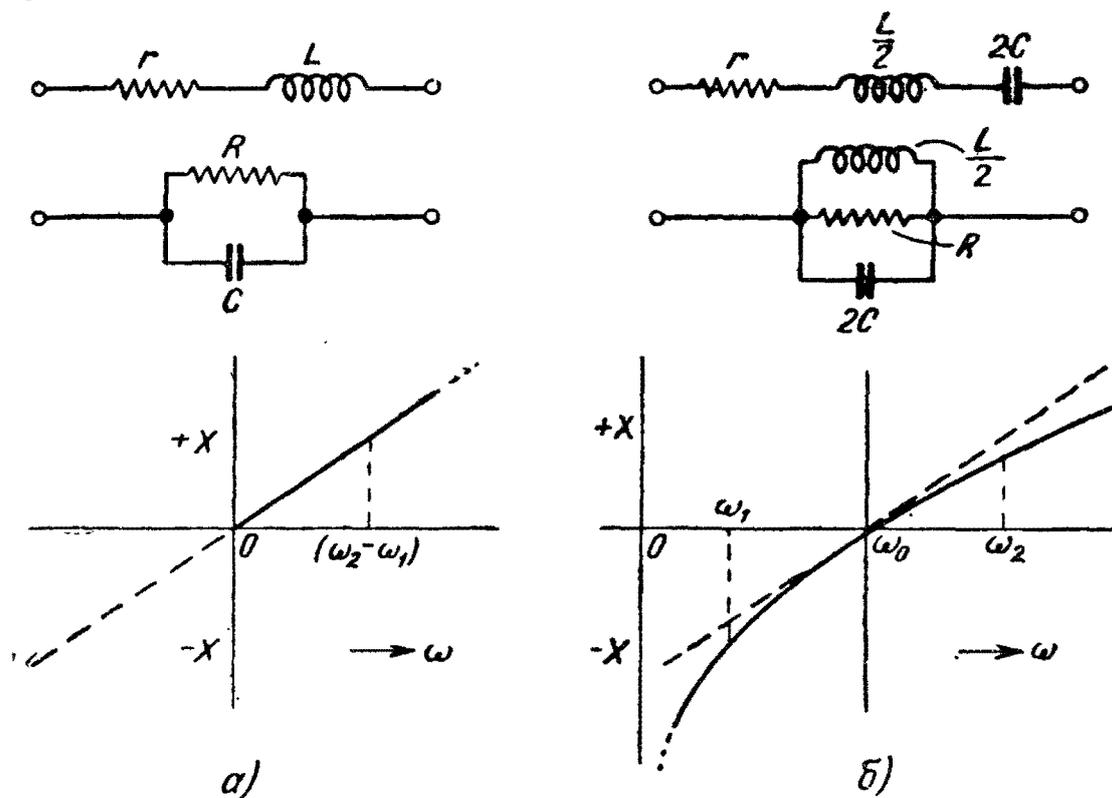


Рис. 50. Полосовые фильтры, эквивалентные двухполюснику с одним реактивным элементом:

а) двухполюсник с одним реактивным элементом; б) эквивалентные полосовые фильтры.

Эта теорема чрезвычайно полезна, так как в сочетании с принципом приведения несущей частоты к нулевой существенно упрощает расчет переходных процессов в некоторых цепях, как будет показано в § 41 следующей главы.

ГЛАВА IV

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

34. Качество передачи в каналах связи

Различные устройства, образующие канал связи, могут быть двух типов:

1) „двусторонние“ — могущие передавать энергию в обоих направлениях между входными и выходными зажимами (например, фильтры, линии, ослабители);

2) „односторонние“ — допускающие передачу энергии только в одном направлении (например, ламповые усилители и реле). Применять к односторонним устройствам термин „передаваемая энергия“ не совсем правильно, так как энергия в этом случае получается от какого-нибудь местного источника, управляемого такими устройствами (например, от анодной батареи в усилителе).

Односторонние устройства, в свою очередь, могут быть разделены на две группы: устройства, изменяющие конфигурацию цепи при получении возбуждающего импульса (например, телефонные реле), и устройства, не изменяющие конфигурацию цепи (например, обыкновенные усилители). Устройства первой группы могут изменять число контуров или ветвей в цепи. Такие методы передачи применяются только в случаях очень простых сигналов и не могут быть использованы для воспроизведения формы таких сигналов, как речь или видеосигналы. Устройства другой группы могут изменять состояние цепи без изменения ее конфигурации. Например, угольный или конденсаторный микрофоны изменяют активное сопротивление или емкость цепи.

При прохождении через элементы реального канала связи сигнал претерпевает известные искажения, так что форма его на выходных зажимах будет, в общем случае, отличаться от формы его на входных зажимах. Если не рассматривать устройств, изменяющих состояние или конфигурацию

цепи, то искажения сигнала могут быть вызваны двумя причинами: 1) нелинейностью цепи и 2) частотной избирательностью цепи.

Нелинейность канала связи означает, что уровень сигнала на выходе не строго пропорционален уровню входного сигнала, что может быть вызвано нелинейностью характеристик ламп, гистерезисом в железных сердечниках катушек индуктивности и трансформаторов, а также другими причинами.

Нелинейность, в частности, свойственная электронным лампам, не обязательно должна рассматриваться во всех случаях как недостаток, так как на этом свойстве основано применение ламп в качестве детекторов, смесителей и т. д. Но в усилителях нелинейность является только причиной искажений, так как при этом появляются новые частотные составляющие, добавляемые к сигналу. В случае сигнала сложной формы появляются не только частоты, кратные основной, но и суммарные и разностные частоты и их гармоники.

В том случае, когда имеется кривая отношения сигнала на выходе канала связи к входному сигналу, метод оценки искажений передаваемого сигнала определенной геометрической формы достаточно ясен. Однако в случае передачи, например, речи, сигнал имеет сложную форму, между его составляющими нет строгих соотношений, и искажения гармоник вычислить очень трудно, хотя и имеются методы расчета для некоторых простых случаев.

Другой вид искажений сигнала, обусловленный частотной избирательностью цепи, заключается в изменении частотного спектра передаваемого сигнала. Свойством избирательности обладают только цепи, содержащие реактивные элементы (и, одновременно, активные сопротивления), способные запасать энергию. Ввиду того, что все каналы связи, как правило, обладают некоторой избирательностью, всегда будут иметь место искажения сигнала. Частотная избирательность необходима для разделения нескольких, передаваемых одновременно по проводам или по радио, сигналов. В реальных системах связи существуют определенные диапазоны частот, в пределах которых должно быть размещено некоторое ограниченное число сигналов. Несущие частоты их должны быть разнесены так, чтобы сигналы вместе со спектрами боковых полос могли быть выделены соответствующими полосовыми фильтрами. Избирательность каждого фильтра должна обеспечивать полное устранение боковых полос соседних сигналов.

Ясно, что чем уже спектры сигналов, передаваемых по смежным каналам, тем плотнее могут располагаться несущие частоты, и, следовательно, тем большее число каналов связи с узкополосными фильтрами может быть использовано. Хорошо известно, что чем уже полоса канала, тем хуже качество передачи сигнала. Однако требуется некоторая количественная оценка этого ухудшения. Одной ссылкой на

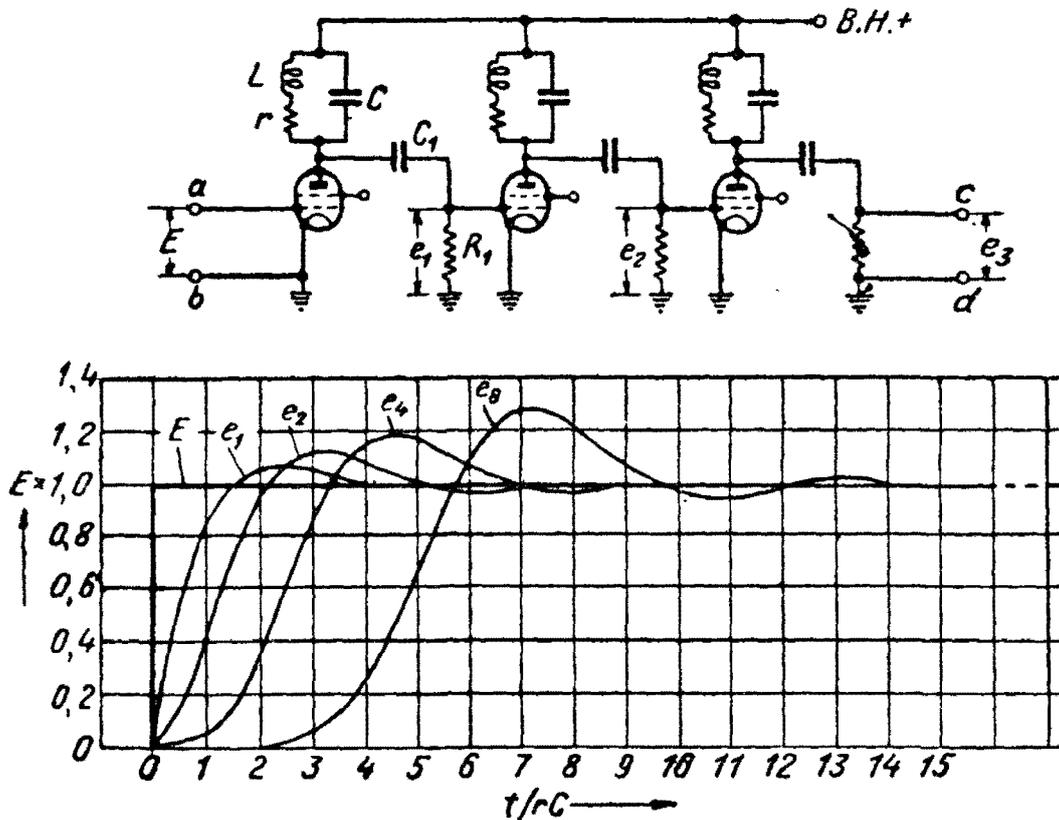


Рис. 51. Форма выходного сигнала N -каскадного усилителя при возбуждении его скачкообразным напряжением. N равно 1, 2, 4 и 8. $L/Cr^2 = Q^2 = 0,5$.

„ширину полосы“ канала недостаточно, так как точная форма характеристики зависит от типа применяемой избирательной цепи. Более того, выражение „ширина полосы“ фактически является неопределенным, так как фильтр не обладает характеристикой прямоугольной формы, и ширина полосы должна измеряться на каком-то условном уровне ослабления сигнала.

Для иллюстрации типичных искажений сигнала в канале связи на рис. 51 приведены формы сигналов на выходе видеоусилителя, применяемого в телевидении. К входным зажимам ab подводится скачкообразный сигнал с амплитудой E . Кривые показывают формы этого сигнала e_N на выходных зажимах cd при различном числе усилительных каскадов N . Для большей наглядности все эти сигналы приведены к одному уровню.

Искажение формы сигнала проявляется в следующем.

1. Сигнал нарастает в течение некоторого конечного времени, возрастающего с увеличением числа усилительных каскадов N . Время нарастания или установления обычно определяется как время, в течение которого величина сигнала нарастает от 10 до 90% его установившегося значения.

2. Сигнал на выходе появляется спустя некоторое время после того, как приложен сигнал на входе. „Время задержки“ также возрастает с увеличением N . Оно измеряется до точки, в которой величина сигнала достигает половины амплитудного значения.

3. Максимальное значение сигнала на выходе превышает амплитуду установившегося сигнала на определенную величину (начальный выброс).

Искажения (1) и (2) имеют особенно большое значение и характерны для всех каналов — телевизионного, телефонного, телеграфного и т. п.

В случае передачи речи сигналы можно рассматривать состоящими из ряда возмущений, подобных скачкообразным напряжениям, поэтому время нарастания будет влиять на разборчивость сигнала. Чем больше время нарастания сигнала при прохождении по каналу, тем менее пригоден этот канал для передачи быстро меняющихся сигналов и тем сильнее будут искажаться принимаемые сигналы. На четкость сигнала будет также влиять начальный выброс; величина, длительность и затухание выброса зависят только от формы примененных избирательных цепей. В рассматриваемом примере взяты самые простые цепи — параллельные колебательные контуры с активным сопротивлением в одной ветви (с асимметричной нагрузкой). Выброс сигнала определяется величиной их добротности Q (кривые построены для $Q = 1/\sqrt{2}$).

Иногда, в частности для звуковых каналов, удобнее определять четкость передачи сигнала по частотным характеристикам для установившегося режима, так как эти характеристики позволяют так же судить об искажениях сигнала, как и кривые воспроизведения скачкообразного сигнала. Оба вида характеристик связаны теоремой Фурье, рассматриваемой подробнее в этой главе.

На рис. 52 приведены частотные характеристики одного каскада усилителя, рассмотренного в качестве примера (рис. 51). Соответствующей кривой воспроизведения скачкообразного сигнала для этого случая является кривая e , на рис. 51. Оба типа характеристик — для установившегося и переходного режима — определяют поведение усилительного

каскада под воздействием любых сигналов при условии, что лампа линейна.

При двух каскадах сигнал нарастает по кривой e_2 в течение большего промежутка времени, а полоса пропускания, определяемая по кривой избирательности, будет уже.

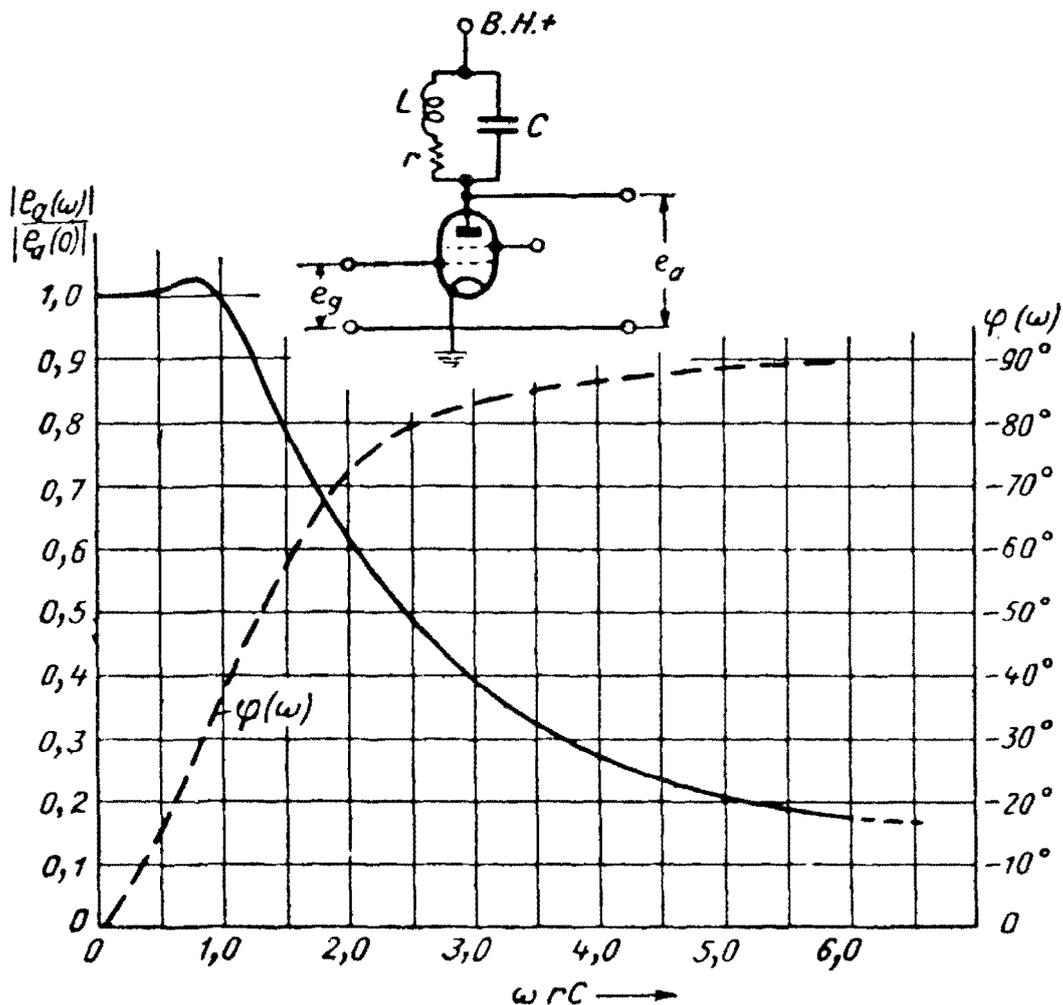


Рис. 52. Частотные характеристики усилительного каскада $L/Cr^2=Q^2=0,5$.

Так, согласно характеристике для одного каскада (рис. 52) амплитуда составляющей с частотой $\omega = 2,5/rC$ уменьшается вдвое. Два каскада уменьшат ее до одной четверти, три — до одной восьмой и т. д. Общим правилом является, что время нарастания сигнала увеличивается с уменьшением ширины полосы канала.

С увеличением числа каскадов N возрастает также почти линейно фазовый сдвиг сигнала при прохождении по каналу, а это, в свою очередь, вызывает возрастание „времени задержки“, как будет показано ниже.

Как частотные характеристики для установившегося режима (рис. 52), так и кривые воспроизведения скачка напря-

жения (рис. 51) изображены в виде „универсальных“ характеристик в функции от относительной частоты ωrC и относительного времени t/rC , где rC — постоянная времени избирательной цепи. Характеристики будут сохранять свою форму (в другом масштабе) при изменении rC при условии, что величина Q постоянна. Этого можно добиться, сохраняя r постоянным и изменяя L и C в одном и том же отношении. При этом форма сигнала будет сохраняться неизменной, но масштаб будет изменяться, или, иными словами, искажения останутся теми же, но скорость передачи изменится. При уменьшении L и C увеличивается крутизна скачка (в масштабе абсолютного времени) и расширяется полоса пропускания, вследствие чего увеличивается четкость передачи сигнала.

Эти выводы не столь очевидны для более сложных избирательных цепей, состоящих из нескольких контуров, но они применимы к каждому контуру цепи в отдельности*.

В практике, конечно, придется сталкиваться с определенными трудностями в случае, если передача какого-либо сигнала по каналу связи требует значительного времени. Это, например, недопустимо в телевидении, хотя в других видах передачи требования менее жестки. Из всего сказанного в этом разделе можно вывести общее правило, состоящее в том, что объем передаваемой по данному каналу связи информации пропорционален произведению ширины полосы канала на время его использования.

Хотя характеристики установившегося режима применяются для оценки качества канала связи чаще, чем характеристики переходного режима, следует учитывать, что все сигналы связи являются неустановившимися, так как сам процесс передачи предполагает какие-то изменения сигнала. С помощью непрерывных незатухающих синусоидальных колебаний вообще нельзя передать какую бы то ни было информацию.

Поведение цепи в переходном режиме можно определить по характеристикам для установившегося режима, хотя во многих случаях это может оказаться очень трудным или невозможным с математической точки зрения. Однако часто бывает достаточно оценить это поведение только качественно, что гораздо проще. Непосредственный анализ переходных процессов может быть произведен на основе решения дифференциальных уравнений цепи. Для упрощения решения таких уравнений разработаны различные операторные методы.

* В первой главе было показано, что форма свободных колебаний в цепи зависит только от величины Q ее контуров.

После того, как составлено дифференциальное уравнение, задача из физической переходит в математическую, причем в большом числе случаев неразрешимую.

35. Анализ переходных процессов с помощью характеристик для установившегося режима

Для анализа переходных процессов в цепях можно воспользоваться характеристиками установившегося режима, если учесть амплитудные и фазовые искажения каждой синусоидальной составляющей приложенного сигнала, обусловленные характеристиками цепи. Такой анализ складывается из трех основных этапов.

1. Разложения приложенного сигнала в ряд Фурье.
2. Видоизменения этого спектра в соответствии с характеристиками цепи.
3. Суммирования всех синусоидальных составляющих видоизмененного спектра.

Такая задача может возникнуть в двух видах: во-первых, как чисто теоретический расчет, когда известны аналитическая функция, представляющая приложенный сигнал, и характеристики цепи; во-вторых, как некоторый приближенный расчет на основании практически полученных или вычисленных характеристик для каких-то определенных частот.

Для решения обеих задач применяются одни и те же принципы. Предположим, что периодически повторяющийся короткий сигнал аналитически заданной формы подается на зажимы цепи, характеристики которой также известны в виде аналитического выражения.

Пусть приложенный сигнал будет

$$\left. \begin{array}{l} i = f(t), \\ \text{а характеристики цепи} \\ Z(\omega), \varphi(\omega) \end{array} \right\} \quad (178)$$

Приложенный сигнал должен быть разложен на гармонические составляющие. Если эта операция окажется невозможной или слишком трудной, тогда можно разложить сигнал на ряд более простых составляющих, каждая из которых может быть разложена в ряд (например, приложенный сигнал можно рассматривать, как состоящий из некоторого числа скачков или прямоугольных импульсов, сложенных вместе, как будет показано в § 42). Далее, можно определить реакцию цепи на каждую из этих простых составляющих и сложить полученные результаты по принципу суперпозиции

для получения выходного сигнала. Предположим, что $f(t)$ в данном примере разложима в ряд Фурье, т. е.

$$i = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t, \quad (179)$$

где a_n и b_n — соответственно амплитуды n -ой косинусоидальной и синусоидальной составляющих. Сигнал на выходе цепи будет иметь подобный же спектр, но с гармониками, измененными по амплитуде и фазе.

Передающее сопротивление цепи на частотах гармоник будет иметь вид

$$\left. \begin{array}{l} \text{Модуль } |Z(\omega_n)| \\ \text{Фазовый угол } \varphi(\omega_n) \end{array} \right\}. \quad (180)$$

Тогда спектр сигнала на выходе выразится как

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Z(\omega_n)| \{a_n \cos [\omega_n t - \varphi(\omega_n)] + b_n \sin [\omega_n t - \varphi(\omega_n)]\} \quad (181)$$

и может быть определен по известным для данных частот $|Z(\omega_n)|$ и $\varphi(\omega_n)$ путем вычисления или измерения.

Процесс вычисления в случае одиночного кратковременного сигнала аналогичен этому, но требует разложение сигнала в непрерывный спектр с помощью интеграла Фурье. Предположим, что приложенный сигнал имеет форму, позволяющую вычислить его частотный спектр

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (\text{см. уравнение 114}).$$

Это выражение представляет собой сумму непрерывного спектра косинусоидальных и синусоидальных составляющих сигнала. Поскольку передающее сопротивление, выраженное в аналитической форме, известно для любой частоты, можно вычислить выходной сигнал, создаваемый в цепи каждой составляющей спектра.

Спектр выходного сигнала будет выражаться как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Z(\omega)| \{a(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] + b(\omega) \sin [\omega t - \varphi(\omega)]\} d\omega. \quad (182)$$

Раскрывая выражение (182), его можно представить в виде суммы косинусоидальных и синусоидальных членов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Z(\omega)| [a(\omega) \cos \varphi(\omega) - b(\omega) \sin \varphi(\omega)] \cos \omega t d\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(\omega)| [b(\omega) \cos \varphi(\omega) + a(\omega) \sin \varphi(\omega)] \sin \omega t d\omega. \quad (183)$$

Таким образом, выходной сигнал может быть выражен в функции от частоты, что не всегда удобно, так как обычно требуется, чтобы сигнал был выражен как функция времени. Для этого требуется решить интегралы (183), т. е. сложить бесконечные спектры синусоидальных составляющих для получения выражения результирующего выходного сигнала. При этом в большинстве случаев возникают трудности, так как лишь немногие интегралы Фурье решаются просто.

В § 20 была показана связь между показательной и тригонометрической формой комплексного числа. Не отрицая удобства пользования показательной формой, следует все же сказать, что для приближенного решения задачи применение тригонометрической формы дает определенные преимущества, так как оно наглядно показывает относительную симметрию составляющих спектра и характеристик цепи (т. е. симметрию четных и нечетных составляющих, действительных и мнимых частей характеристик и т. д.). Это поясняется рассматриваемыми ниже примерами.

Пример 1. Воздействие на цепь сигнала симметричной формы. Рассмотрим в качестве примера форму напряжения, создаваемого в цепи с известным передаточным сопротивлением $Z(\omega)$, $\varphi(\omega)^*$, одиночным импульсом тока прямоугольной формы, симметричным относительно оси, проходящей через $t=0$ (рис. 53,а).

Такой импульс обычно применяется при анализе переходных процессов в цепях, поэтому интересно определить его спектр. Прямоугольный импульс тока может быть представлен в виде функции $f_c(t)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$f_c(t) = I \text{ при } -T_1/2 < t < +T_1/2, \quad (184)$$

* В примере рис. 53 принято, что цепь состоит из параллельно соединенных конденсатора и активного сопротивления.

и $f_c(t) = 0$ при всех значениях t вне этих пределов. Спектр этой функции определяется интегралом Фурье

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_c(t) \cos \omega t dt. \quad [(113)]$$

Подставляя сюда $f_c(t)$ из (184), получим

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} I \cos \omega t dt = \frac{2I}{\pi\omega} \sin \frac{\omega T_1}{2}. \quad (185)$$

Выражение (185) представляет амплитуды косинусоидальных членов непрерывного спектра (рис. 53,б), так как $f_c(t)$ симметричная или четная функция. Тогда $f_c(t)$ можно записать, как сумму составляющих этого бесконечного спектра. Вследствие симметрии интеграл можно взять в пределах от 0 до ∞ , т. е.

$$f_c(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

Напряжение, создаваемое этим током на сопротивлении $Z(\omega)$, будет

$$u(t) = \int_0^{\infty} |Z(\omega) a(\omega)| \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega$$

или

$$u(t) = \int_0^{\infty} [|Z(\omega) a(\omega)| \cos \varphi(\omega) \cos \omega t + \\ + |Z(\omega) a(\omega)| \sin \varphi(\omega) \sin \omega t] d\omega,$$

что можно записать как

$$u(t) = u_c(t) + u_s(t), \quad (186)$$

где $u_c(t)$ и $u_s(t)$ — соответственно напряжения, обусловленные действительной и мнимой частями характеристики цепи. (См. уравнение 131). Действительная составляющая напряжения $u_c(t)$ состоит из косинусоидальных членов и поэтому симметрична. Мнимая составляющая $u_s(t)$ состоит из синусоидальных членов и поэтому, как нечетная функция, должна иметь симметрию 2-го рода. Обе составляющие показаны на рис. 53, в и г.

В реальной физической цепи такие составляющие не могут быть разделены, поэтому они должны быть сложены для получения формы результирующего напряжения $u(t)$.

Так как приложенный ток $i = f_c(t)$ имеет нулевую амплитуду до $t = -T_1/2$, то в это время в цепи не может быть и напряжения, т. е.

$$u(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < -T_1/2. \quad (187)$$

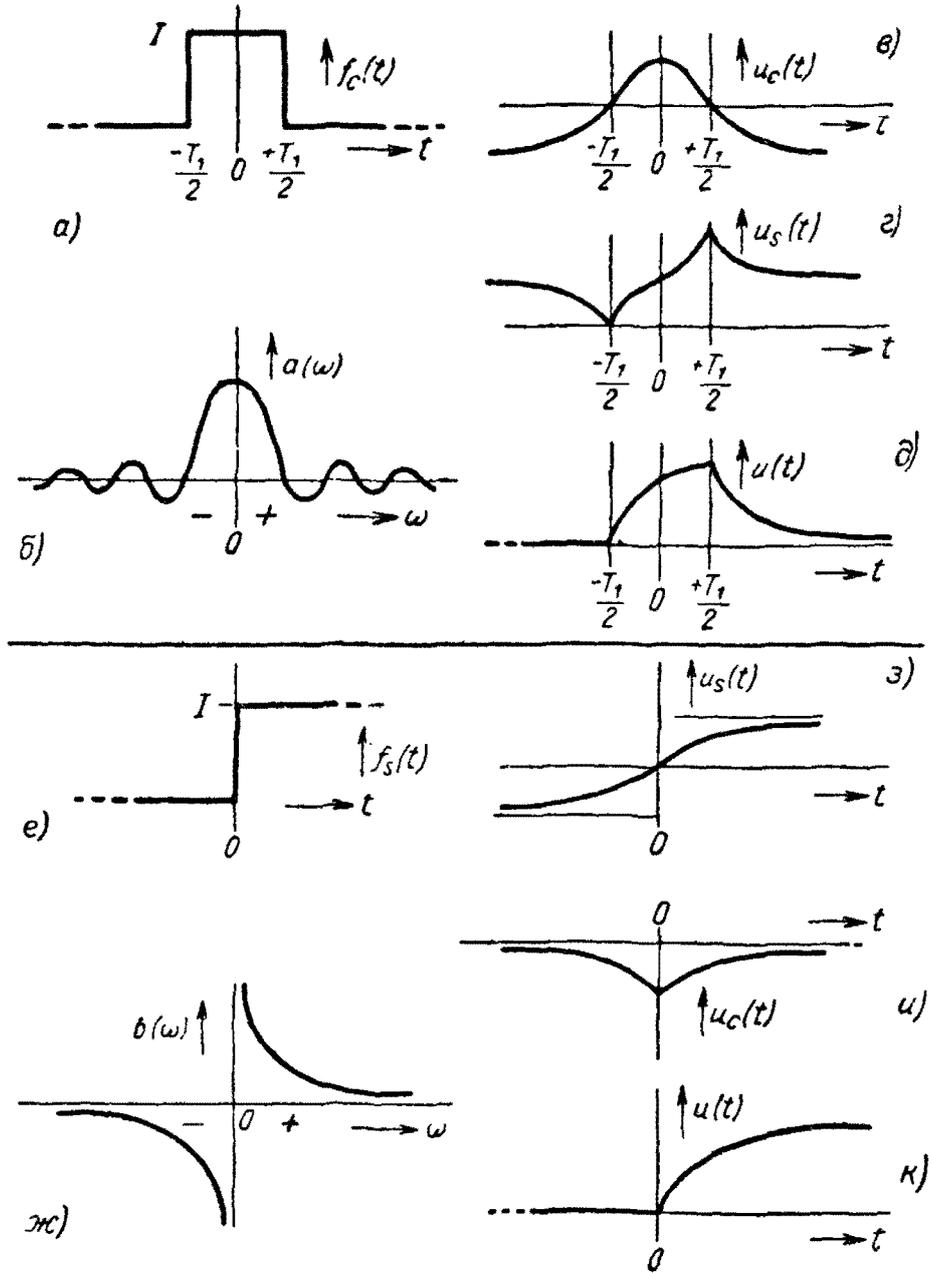


Рис. 53. Форма выходных сигналов при возбуждении цепи сигналами, обладающими симметрией 1-го и 2-го рода:

а) входной сигнал, обладающий симметрией 1-го рода; б) сопряженный спектр сигнала а; в) действительная составляющая выходного напряжения; г) мнимая составляющая выходного напряжения; д) выходное напряжение, сумма в и г; е) входной сигнал, обладающий симметрией 2-го рода; ж) сопряженный спектр сигнала е; з) действительная составляющая выходного напряжения; и) мнимая составляющая выходного напряжения; к) выходное напряжение, сумма сигналов з и и и постоянной составляющей.

Полученная в результате сложения $u_c(t)$ и $u_s(t)$ кривая напряжения $u(t)$ представлена на рис. 53,д. Составляющие $u_c(t)$ и $u_s(t)$ взаимно уничтожаются на участках, соответствующих отсутствию тока в цепи. Это значит, что между действительной и мнимой частями характеристики физической цепи должна существовать определенная зависимость. Эта важная зависимость будет исследована в § 43.

Пример 2. Воздействие на цепь сигнала, обладающего симметрией 2-го рода. Если форма тока имеет симметрию 2-го рода относительно $t=0$ (например, скачок тока, рис.53,е), то его частотный спектр должен содержать только синусоидальные составляющие, так как выражающая этот ток функция $f_s(t)$ нечетная.

Функция $f_s(t)$ определяется как

$$\left. \begin{aligned} f_s(t) &= 0 \text{ при } t < 0 \\ f_s(t) &= I \text{ при } t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

Среднее значение ее или постоянная составляющая тока равна $I/2$. Функция такого вида положена в основу операторного метода Хивисайда и названа им единичной функцией. Спектр этой функции может быть вычислен по методам, изложенным в §§ 20 и 21, хотя прямая подстановка условий (188) в интеграл Фурье приводит к выражению, которое элементарно не интегрируется. Однако этот интеграл может быть численно решен следующим способом (см. § 20): рассмотрим периодические колебания прямоугольной формы (рис. 25,а) с периодом T_0 , амплитудой I и началом отсчета времени в точке 2. Их можно представить (за один период) как

$$\left. \begin{aligned} f_s(t) &= 0 \text{ при } -T_0/2 < t < 0 \\ f_s(t) &= I \text{ при } 0 < t < T_0/2 \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

Тогда амплитуда n -ой гармоники определится по уравнению (93)

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} I \sin \frac{2\pi n t}{T_0} dt, \quad (190)$$

что дает

$$b_n = \frac{I}{\pi n} (1 - \cos \pi n). \quad (191)$$

Но $\cos \pi n$ равен минус единице при n нечетном и плюс единице при n четном. Амплитуды спектра нечетных синусоид

социдальных гармоник прямоугольных колебаний выразятся как

$$b_n = \frac{2I}{\pi n} \text{ (при } n \text{ нечетном)}. \quad (192)$$

Предположим теперь, что период T_0 становится бесконечно большим, так что прямоугольная кривая переходит в скачкообразную (рис. 53,е). Основная частота становится при этом бесконечно малой и гармоники располагаются плотно друг к другу. Если нечетные гармоники разделяются интервалами $\delta\omega$ (равными удвоенной основной частоте, так как гармоники следуют через одну), то $n\delta\omega/2$ равно основной частоте ω . Спектр становится непрерывной функцией $b(\omega)$ и уравнение (192) может быть переписано как

$$b_n / \delta\omega \rightarrow b(\omega) = I/\pi\omega. \quad (193)$$

Выражение (193) дает амплитуды соприкасающихся синусоцидальных членов. При суммировании их от нуля до бесконечности получится скачкообразная кривая, выражаемая интегралом Фурье

$$f_s(t) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega = \frac{I}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (194)$$

К этому должна быть прибавлена постоянная составляющая $I/2$, так как кривая имеет одну полярность. Частотный спектр $b(\omega)$ изображен в сопряженной форме на рис. 53,ж. Он обладает симметрией 2-го рода относительно 0.

Ток такой формы создает в цепи с передаточным сопротивлением $|Z(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ напряжение

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^{\infty} |Z(\omega) b(\omega)| \sin [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} [|Z(\omega) b(\omega)| \cos \varphi(\omega) \cdot \sin \omega t - |Z(\omega) b(\omega)| \sin \varphi(\omega) \cos \omega t] d\omega = \\ &= u_s(t) + u_c(t), \end{aligned} \quad (195)$$

к которому должна быть прибавлена постоянная составляющая $Z(0) I/2$.

Первая составляющая $u_s(t)$ обусловлена действительной частью характеристики цепи и является нечетной функцией с симметрией 2-го рода, а вторая составляющая $u_c(t)$ — четная функция и изображается симметричной кривой (рис. 53,з и u). В реальной цепи эти составляющие неразделимы и сумма

их $u(t)$ должна быть равна нулю во всех точках до момента $t=0$, когда в цепи появляется ток.

В рассмотренных примерах определялось напряжение, создаваемое в цепи током известной формы. Однако это было сделано только с целью иллюстрации. Можно рассматривать действие напряжения известной формы и определить вызываемый им ток при условии, что соответствующие характеристики цепи известны.

36. Пример применения интеграла Фурье к анализу переходных процессов

В качестве примера расчета переходных процессов в цепи с помощью интеграла Фурье рассмотрим очень простой случай усилительной схемы на тетроде, с активным нагрузочным сопротивлением в анодной цепи (рис. 54), в которой шунтирующая емкость анод—земля имеет заметную величину. Такая схема может встретиться в телевизионной аппаратуре. Метод, который будет применен, не имеет особенных преимуществ в данном именно случае. Он приведен лишь как пример применения интеграла Фурье, разобранный в общих чертах в § 35.

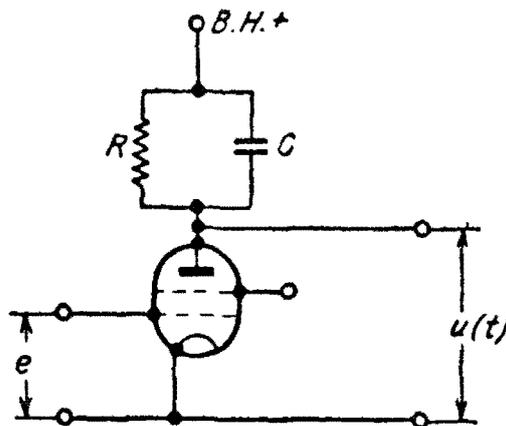


Рис. 54. Усилительный каскад на тетроде с нагрузкой в виде сопротивления, шунтированной емкостью.

Если к сетке лампы приложено скачкообразное напряжение e , то анодный ток будет иметь такую же форму, при условии, что цепи экранной сетки и катода тщательно заблокированы. Следовательно, по сопротивлению нагрузки внезапно пройдет постоянный ток I , возникающий при $t=0$. Требуется определить форму анодного напряжения $u(t)$.

Спектр скачка тока был уже вычислен [уравнение (193)]. Бесконечно малые составляющие являются синусоидами, так как кривая нечетная. Скачок тока и его спектр показаны на рис. 53, e и $ж$. Амплитуда составляющей с частотой ω равна

$$d\omega \cdot b(\omega) = Id\omega / \pi\omega. \quad (196)$$

Полное сопротивление анодной нагрузки на частоте ω равно

$$Z(j\omega) = \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (197)$$

Составляющая анодного напряжения на частоте ω из уравнений (196) и (197) получится равной

$$d\omega b(\omega) \cdot Z(j\omega) = \frac{IR(1 - j\omega CR)}{\pi\omega(1 + \omega^2 C^2 R^2)} d\omega. \quad (198)$$

Это выражение определяет спектр $b(\omega) Z(j\omega)$ синусоидальных составляющих анодного напряжения. Кривая напряжения $u(t)$ получится как сумма всех составляющих спектра от нулевой до бесконечно большой частоты, т. е.

$$u(t) = \frac{IR}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin \omega t}{(1 + \omega^2 C^2 R^2)\omega} - \frac{j\omega CR \cdot \sin \omega t}{(1 + \omega^2 C^2 R^2)\omega} \right] d\omega = u_s(t) + u_c(t) \quad (199)$$

(рис. 53, з, и и к).

Интеграл написан в такой форме для того, чтобы показать отдельно действительную и мнимую составляющие. Как было показано в предыдущем разделе, эти составляющие практически не отделимы, поэтому они должны иметь одинаковую форму, но симметрию разного рода, так, чтобы при сложении их сумма равнялась нулю на участке до $t=0$. Поэтому достаточно вычислить только $u_s(t)$ или $u_c(t)$. Вычислим $u_c(t)$

$$u_c(t) = \frac{IR}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{jCR \cdot \sin \omega t}{1 + \omega^2 C^2 R^2} d\omega. \quad (200)$$

Значение интеграла (200) в виде явной функции времени может быть найдено в таблице интегралов

$$u_c(t) = -\frac{RI}{2} e^{-t/RC}. \quad (201)$$

Аналогично, $u_s(t)$ должно иметь такую же форму, для $t \geq 0$ и быть обратной полярности при $t < 0$ (рис. 53, з и и), так, что суммарное напряжение (вместе с постоянной составляющей $RI/2$) равно

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= RI(1 - e^{-t/RC}) && \text{при } t \geq 0 \\ u(t) &= 0 && \text{при } t < 0 \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

(рис. 53,к). Этот результат мог быть получен быстрее путем решения элементарного дифференциального уравнения. Однако на данном примере показаны три существенных этапа расчета переходных процессов на базе установившегося

режима: нахождение частотного спектра, видоизменение этого спектра в соответствии с характеристиками цепи и суммирование или интегрирование для получения результирующей кривой.

Метод неприменим ко многим более сложным цепям, так как лишь небольшое число интегралов Фурье приводится в таблицах.

Метод раскрывает основные соотношения между действительной и мнимой частями характеристик реальных цепей.

Как будет показано дальше (при рассмотрении вопроса об идеализации характеристик при анализе цепей), применение интеграла Фурье оказывает большую практическую пользу для общей оценки поведения цепей.

37. Некоторые приемы расчета переходных процессов. Замена интеграла Фурье рядом Фурье

Хотя применение интеграла Фурье оказывается ограниченным вследствие больших трудностей, связанных с решением результирующих интегралов, принцип, заложенный в его основе, может быть использован при практических расчетах, имеющих чрезвычайно важное значение для приблизительной оценки переходных процессов. Для этого не требуется производить аналитических выкладок, и решение может быть получено путем прямого арифметического сложения различных синусоидальных составляющих, образующих подводимый к цепи сигнал, после видоизменения их амплитуд и фаз в соответствии с характеристиками цепи. Эти характеристики не обязательно должны быть представлены аналитическими выражениями, а могут быть даны в виде кривых, полученных опытным путем.

Если подводимый к цепи сигнал является одиночным импульсом произвольной формы, то для точного решения требуется сложение бесконечного числа синусоидальных составляющих. Однако этого можно избежать, используя только определенным образом выбранные составляющие, разделенные равными интервалами по частоте. Это значит, что такой сигнал будет представляться рядом Фурье и рассматриваться, как периодически повторяющийся.

Практически требуется рассмотреть только сигнал одной определенной формы — симметричный прямоугольный импульс (рис. 53,а) — так как на основе этого можно оценить воздействие на цепь сигнала любой другой формы. Частотный спектр этого импульса определяется уравнением (185). Все его составляющие — косинусоидальные и имеют максимальное

значение при $t=0$. На рис. 55,а показан график непрерывного спектра прямоугольного импульса, а на рис. 55,б—спектр представлен рядом гармонических составляющих, расположенных с интервалом $\omega = 2\pi/T_0$. Соответствующие этим двум спектрам одиночный импульс и периодическая прямоугольная кривая (с периодом T_0) показаны на рис. 55,в и г, соответственно. Гармонические составляющие (рис. 55,б) могут быть видоизменены по амплитуде и фазе в соответствии с характеристиками цепи, и после их суммирования они дадут результирующее периодическое колебание на выходе цепи.

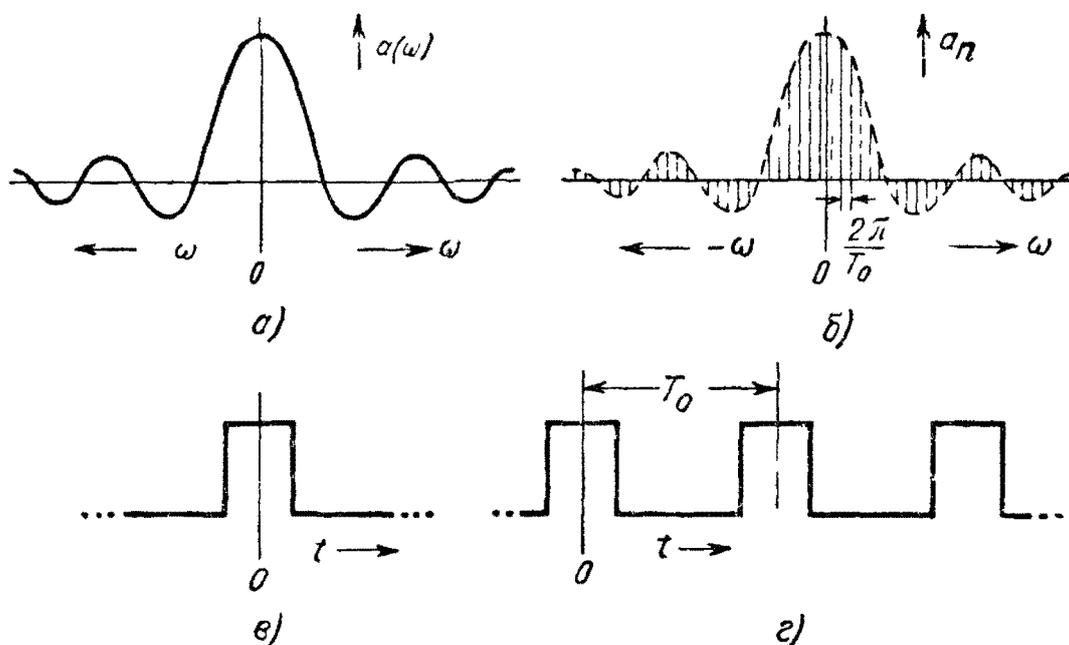


Рис. 55. Спектры одиночного прямоугольного импульса и периодических прямоугольных колебаний:

а) сопряженный спектр одиночного импульса; б) сопряженный спектр периодических колебаний; в) одиночный импульс; г) периодические колебания.

Возникает вопрос о правильном выборе частотного интервала $2\pi/T_0$. Чем шире этот интервал, тем меньше труда потребуется для расчетов, но чем меньше период T_0 , тем менее точное решение будет получено.

Критерием может служить степень затухания тока или напряжения, созданного одним прямоугольным колебанием, к началу следующего колебания. Величина остаточного тока или напряжения e_1 (рис. 56,б) может служить мерой ошибки, получающейся при выборе слишком малого периода повторения. Некоторая ошибка всегда будет иметь место при таком допущении и влияние ее должно быть оценено в каждом отдельном случае. Хотя нарастание тока или напряжения под действием прямоугольного сигнала может происходить

В течение конечного промежутка времени (кривая ab на рис. 56, β) спадание его (после точки b) в цепи с реактивными элементами должно продолжаться бесконечно долго. Это бесконечно большое время спадания представляет только теоретический интерес и обусловлено тем, что для рассеяния энергии в реактивных элементах цепи принципиально требуется бесконечно большое время. Практически должен быть выбран некоторый уровень, ниже которого остаточное напряжение можно считать ничтожно малым.

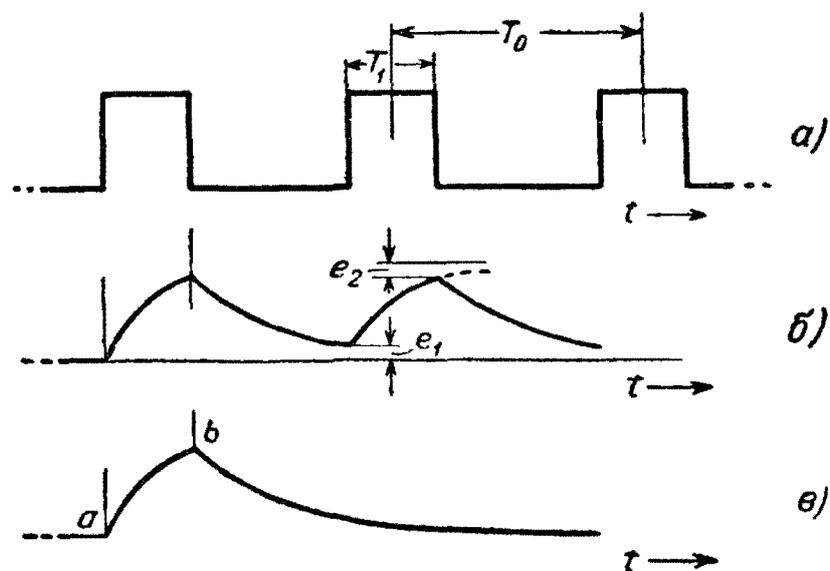


Рис. 56. Иллюстрация ошибки, получающейся при замене интеграла Фурье рядом Фурье:
 а) входной сигнал; б) форма выходного сигнала, определенная разложением в ряд Фурье; в) форма выходного сигнала при возбуждении цепи одиночным импульсом.

Не существует определенных методов правильного выбора величины T_0 , но часто оказывается возможным оценить скорость спадания тока или напряжения в цепи по ее постоянной времени или характеристикам установившегося режима. Если амплитудная характеристика имеет резонансный характер или обладает крутыми спадами, а фазовая характеристика нелинейна, то сигнал может претерпевать большие искажения в цепи. В этих случаях период повторения T_0 следует выбирать таким, чтобы количество гармоник основной частоты было достаточно для учета этих резких изменений характеристик при расчете.

В качестве примера на рис. 57 приведены частотные характеристики видеоусилителя на тетроде с фильтром типа K в анодной цепи. Амплитудная характеристика имеет пик, соответствующий настройке контура с определенной добротностью Q . Хотя пик не имеет точной формы резонансной

кривой простого контура, тем не менее в области резонанса можно с достаточным приближением рассматривать эту кривую, как характеристику параллельного контура, и определять эффективную величину Q по полосе $\Delta\omega$ и частоте настройки ω_0 :

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega \text{ (см. § 32, уравнение 169),}$$

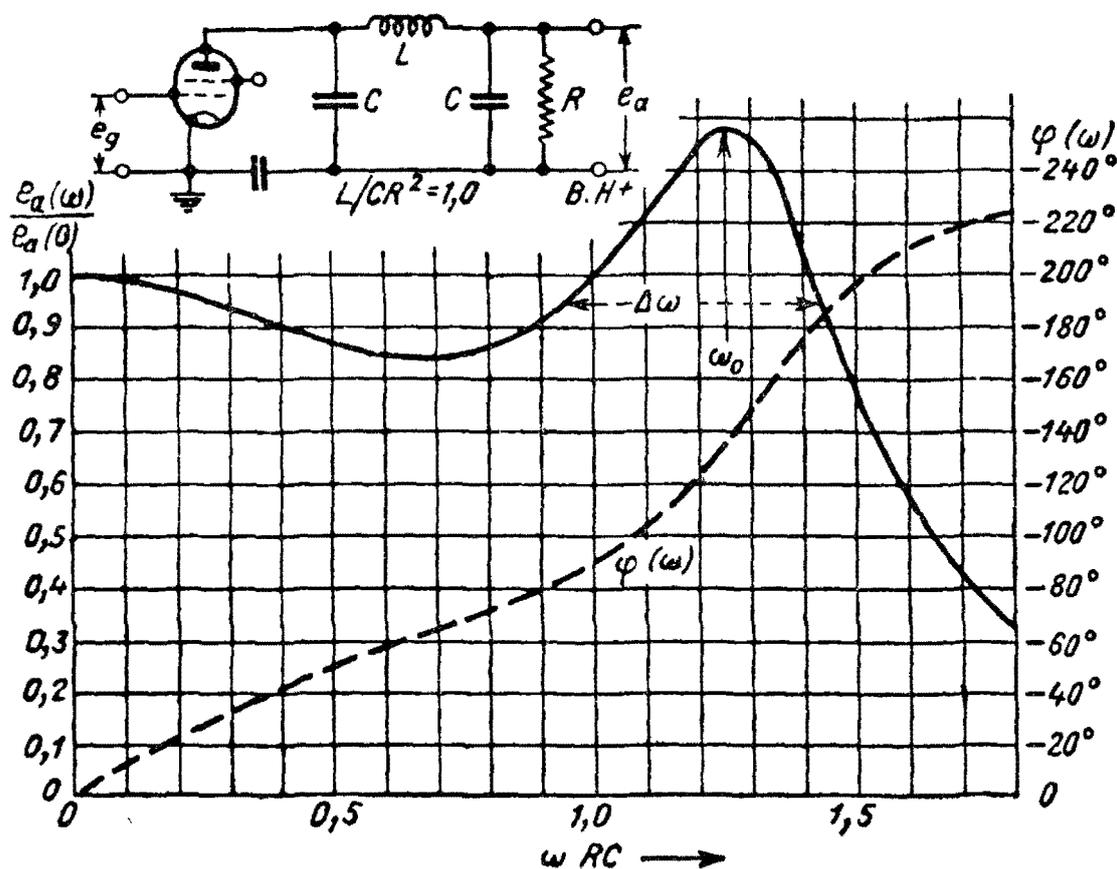


Рис. 57. Частотные характеристики усилителя с резко выраженным выбросом на высоких частотах.

где $\Delta\omega$ — полоса, измеренная по точкам $1/\sqrt{2}$ от максимального значения. В приведенном примере

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= 1,25/CR \\ \Delta\omega &= 0,5/CR \\ Q &= 2,5 \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

Переходные процессы в простом колебательном контуре рассматривались в § 5 главы I, где было установлено соот-

ношение между Q и постоянной времени (уравнение 39). На рис. 8 были приведены кривые, по которым можно определить время, требующееся для затухания колебаний до практически незначительной величины. Это время и может быть взято в качестве периода повторения T_0 при замене интеграла Фурье рядом Фурье.

Рассмотренный пример сравнительно прост. В других случаях частотные характеристики могут содержать более одного пика. Однако требуется лишь грубое определение продолжительности переходных процессов, как это было сделано выше, для того, чтобы выбрать период повторения T_0 для разложения прямоугольной кривой, используемой при расчетах искажений методом рядов Фурье.

Иногда может потребоваться рассмотреть поведение цепи при воздействии на нее не одиночного прямоугольного импульса, а сигнала скачкообразной формы. И в этом случае расчеты могут быть произведены с достаточной точностью. Как уже было показано ранее (см. § 35), скачок можно рассматривать, как прямоугольную кривую с бесконечно большим периодом. Замена интеграла Фурье рядом Фурье будет достаточно точной при условии, что время T_1 (рис. 5б) будет настолько большим, что за это время в цепи наступит установившийся режим. Величина e_2 может служить мерой ошибки, получающейся при слишком малом T_1 .

При использовании изложенным методом приближенного расчета следует сначала выбрать подходящие значения T_0 и T_1 (рекомендуется брать $T_0 = 2T_1$, для упрощения ряда Фурье) и затем решить, через какие временные интервалы δt брать точки для вычисления результирующей кривой. Значения основной составляющей с периодом T_0 могут быть определены для выбранных точек по тригонометрическим таблицам и затем видоизменены по амплитуде и фазе в соответствии с характеристиками цепи для данной частоты и сведены в таблицу. Так же поступают с прямоугольным импульсом. Рассматривать гармоники с периодом меньшим, чем выбранный интервал δt нет необходимости. Наконец, нужно сложить амплитуды всех составляющих для моментов времени $t = 0, \delta t, 2\delta t, 3\delta t$ и т. д. для получения результирующей кривой.

Наиболее трудной частью в таких расчетах является вычисление фаз составляющих. Для облегчения этого рекомендуется представлять частотные характеристики цепи в виде действительной и мнимой частей.

38. Условия неискаженной передачи сигнала в канале связи

Существуют два основных условия, которым должен удовлетворять канал связи для того, чтобы формы сигналов на входе и выходе его были идентичны (за исключением разности уровней). Канал должен быть линейным и не обладать избирательностью. Первое условие довольно простое и очевидное, второе же требует некоторых пояснений.

Сигнал заданной формы может быть разложен в спектр синусоидальных составляющих (выраженных через модуль и фазу или синусные и косинусные составляющие), и этот спектр является присущим данной форме импульса. Если

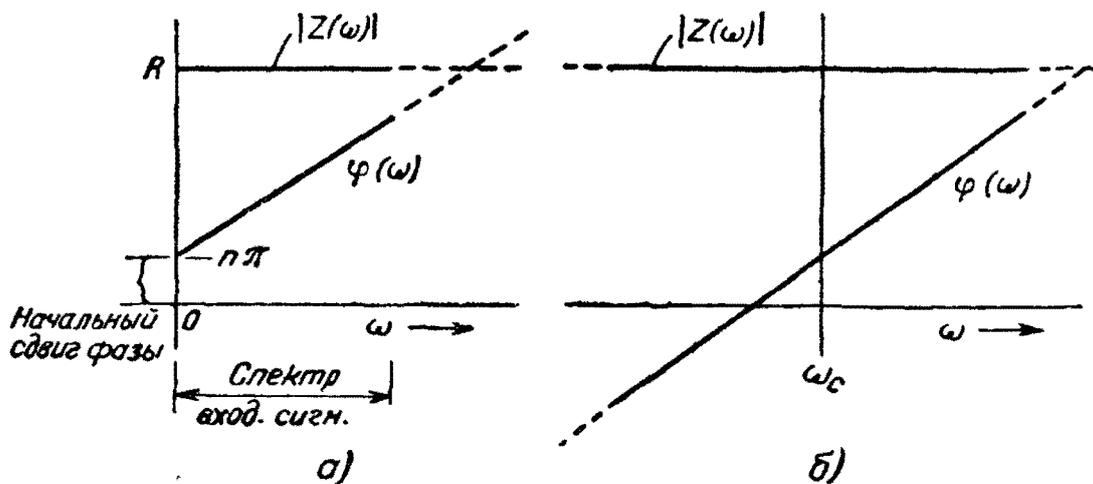


Рис. 58. Идеальные характеристики фильтра, обеспечивающие неискаженную передачу:

а) фильтр нижних частот; б) полосовой фильтр.

цепь обладает избирательностью, то амплитуды и фазы этих составляющих изменятся, и форма сигнала на выходе будет отличаться от его формы на входе.

Пусть $|Z(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ модуль и фаза передаточной характеристики канала, на вход которого подан сигнал $f(t)$, представленный интегралом Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Сигнал $u(t)$ на выходе будет иметь вид согласно уравнения (182)

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(\omega)| \{ a(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] + b(\omega) \sin [\omega t - \varphi(\omega)] \} d\omega.$$

Если $f(t)$ и $u(t)$ должны быть идентичны, то модуль и фаза передаточной характеристики должны быть равны

$$\left. \begin{aligned} |Z(\omega)| &= R \\ \varphi(\omega) &= \omega t_1 + n\pi \end{aligned} \right\}, \quad (204)$$

где R и t_1 постоянные, а n — целое число. Такие характеристики являются идеальными и ими не может обладать ни один реальный канал, содержащий реактивные элементы.

Если спектр передаваемого сигнала занимает ограниченную полосу частот, условия неискаженной передачи должны

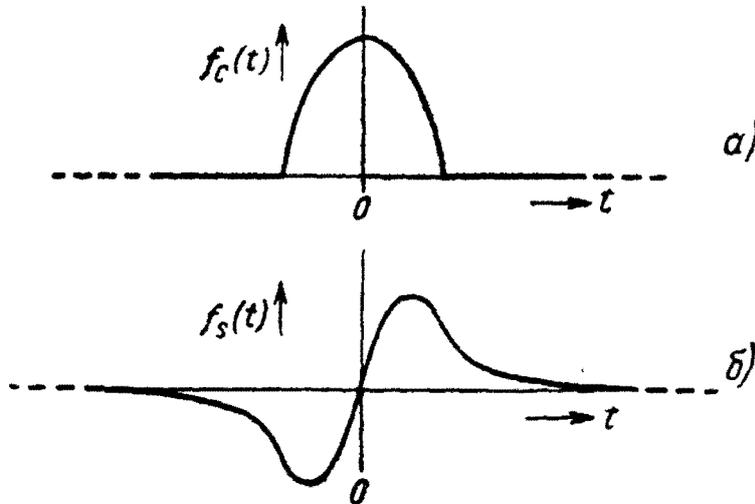


Рис. 59. Искажение формы полукосинусоидального импульса в случае, когда начальный сдвиг фазы равен $\pi/2$:

а) полукосинусоидальный импульс $f_c(t)$; б) искажения при сдвиге каждой составляющей импульса a на угол $\pi/2$.

выполняться только для этой полосы. Это имеет место в большинстве фильтров нижних частот и полосовых фильтров. Идеальные характеристики представлены на рис. 58.

Подстановка условия (204) в выражение для $u(t)$ дает

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R [a(\omega) \cos(\omega t - \omega t_1 - n\pi) + b(\omega) \sin(\omega t - \omega t_1 - n\pi)] d\omega$$

или

$$u(t) = R \int_{-\infty}^{+\infty} [a(\omega) \cos(\omega t - \omega t_1) + b(\omega) \sin(\omega t - \omega t_1)] d\omega, \quad (205)$$

Последнее выражение идентично с выражением для входного сигнала и отличается от него наличием множителя R и времени задержки t_1 . Из этого видно, что фазовая характеристика с постоянным наклоном $t_1 = \varphi(\omega)/\omega$ вызывает запаздывание передаваемого сигнала без искажения его формы. Фазовый угол πn при нулевой частоте называется начальным фазовым углом и если n нечетное, то это значит, что сигнал меняет знак. Если же n — не целое число, то сигнал будет искажаться. Например, при $n = 1/2$ косинусоидальные составляющие переходят в синусоидальные и наоборот, что может существенно изменить форму сигнала. На рис. 59 изображен косинусоидальный импульс $f_c(t)$ и соответствующая ему кривая $f_s(t)$, имеющая идентичный амплитудный спектр, но фаза каждой составляющей которого сдвинута на угол $\pi/2$.

В связи с этим, при проектировании телевизионных усилителей, импульсных усилителей в радиолокационной аппаратуре и других каналов, которые должны передавать форму сигнала без искажений, стремятся иметь равномерную амплитудно-частотную характеристику, постоянный наклон фазовой характеристики и начальную фазу точно кратную π .

39. Амплитудные и фазовые искажения

Отклонение от идеальных передаточных характеристик приводит к искажениям формы сигнала, проявляющимся как амплитудные или фазовые искажения, или как те и другие одновременно.

Практически обе части передаточной характеристики, т. е. модуль и фазовый угол, неразделимы. Однако, хотя рассмотрение их порознь является чисто теоретическим приемом, оно тем не менее проливает свет на важные соотношения, существующие между этими двумя составляющими характеристики.

Ранее уже была установлена связь между формами действительной и мнимой частей характеристики реальной цепи (§ 35). Очевидно, должна быть также какая-то связь между модулем и фазовым углом. Амплитудная и фазовая характеристики применяются очень широко, поэтому полезно уметь оценить, какие искажения сигнала будут вызваны отклонением этих характеристик от идеальной формы.

Если бы можно было сконструировать цепь с изменяющейся амплитудной характеристикой $|Z(\omega)$ и со строго линейной фазовой характеристикой, то при прохождении по ней сигнал претерпевал бы симметричные искажения формы. Предположим, что на вход цепи подан контрольный сигнал

симметричной прямоугольной формы (рис. 53,а). Спектр этого сигнала должен содержать только косинусоидальные члены и выражается как

$$f_c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

Создаваемое им напряжение будет равно

$$u_c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) |Z(\omega)| \cos \omega(t - t_1) d\omega, \quad (206)$$

где t_1 — крутизна $\varphi(\omega)/\omega$ линейной фазовой характеристики.

Спектр этого напряжения также содержит только косинусоидальные члены и поэтому должен быть симметричным. Это значит, что искажения формы сигнала будут одинаковыми по обе стороны от $t = t_1$ и напряжение может появиться раньше, чем приложен передний фронт сигнала (т. е. до момента $t = -T_1/2$). Более того, хвост кривой напряжения в реактивной цепи должен простираться в бесконечность*, хотя величина его спустя некоторое время может быть очень малой (но тем не менее конечной). Поскольку кривая симметрична, то время нарастания переднего фронта также должно быть бесконечным. Из этого следует, что фазовая характеристика цепи должна быть такой формы, чтобы в кривую напряжения вносились искажения, обеспечивающие равенство сигнала нулю до момента появления переднего фронта сигнала $f_c(t)$ на входных зажимах цепи.

Практически можно сконструировать цепь, имеющую равномерную амплитудную и нелинейную фазовую характеристики. Такие цепи вызывают задержку сигнала и их фазовые характеристики могут иметь различную форму. Они применяются в качестве схем фазовой коррекции для уменьшения искажений, вызываемых нелинейностью фазовых характеристик фильтров и других цепей.

Пусть $\varphi(\omega)$ — нелинейная фазовая характеристика, а $R = \text{const}$ — равномерная амплитудная характеристика. Если входной сигнал имеет ту же импульсную форму $f_c(t)$, то создаваемое им напряжение будет

$$u(t) = R \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega$$

* Энергия, запасенная в реактивных элементах, не может быть никогда полностью рассеяна к какому-то данному времени, за исключением тех случаев, когда затухание цепи в точности равно критическому.

ИЛИ

$$u(t) = R \int_{-\infty}^{+\infty} [a(\omega) \cos \varphi(\omega) \cos \omega t + a(\omega) \sin \varphi(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (207)$$

т. е. оно состоит из косинусоидальных и синусоидальных составляющих. Таким образом, вследствие нелинейности фазовой характеристики вводится некоторая асимметрия, благодаря которой напряжение не может появиться на выходе до начала подачи импульса на вход.

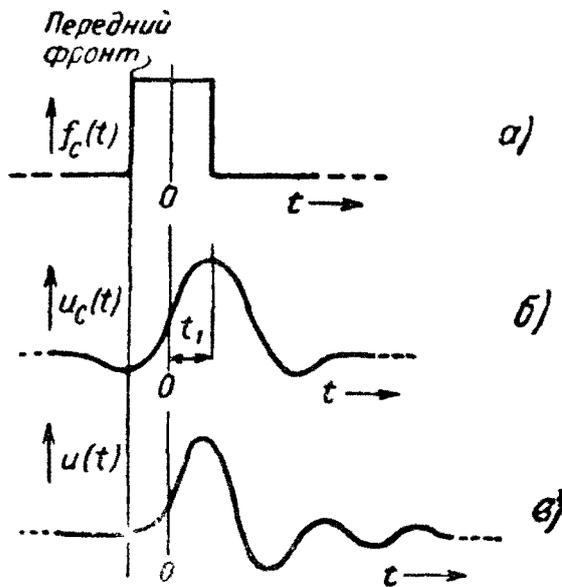


Рис. 60. Влияние амплитудных и фазовых искажений на форму прямоугольного импульса:

а) форма входного сигнала; б) симметричные амплитудные искажения; в) асимметричные фазовые искажения.

Характерные формы амплитудных и фазовых искажений показаны на рис. 60. Скорость нарастания и спада напряжения зависит от формы как амплитудной, так и фазовой характеристик. Скорость возрастает почти пропорционально ширине полосы амплитудной характеристики, хотя точная форма напряжения зависит от формы фазовой характеристики.

Фазовая характеристика обуславливает некоторую асимметрию кривой напряжения, но не может изменить энергии сигнала, откуда следует, что при фазовых искажениях площади,

ограниченные кривыми входного сигнала и создаваемого им напряжения искаженной формы с ординатами в квадрате, должны быть равны, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [R f_c(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t)]^2 dt. \quad (208)$$

Следовательно, основное влияние нелинейности фазовой характеристики заключается в смещении части энергии относительно начала сигнала, вследствие чего и появляется асимметрия. То, что в линейной цепи часть сигнала сме-

щается во времени иначе, чем другая, может быть обусловлено только частотной избирательностью цепи.

Фазовые искажения весьма неприятны в таких системах, как телевидение, где точность воспроизведения формы передаваемых сигналов имеет основное значение, так как большая задержка одних составляющих сигнала, по сравнению с другими, приводит к появлению длинных „хвостов“, на которых могут быть значительные выбросы. В таких системах необходима коррекция фазовых характеристик.

40. Запаздывание несущей и огибающей

В § 38 было показано (уравнение 205), что время задержки любой синусоидальной составляющей сигнала равно отношению $\varphi(\omega)/\omega$. Если это отношение постоянно на всех частотах, то весь сигнал запаздывает на это время, и форма

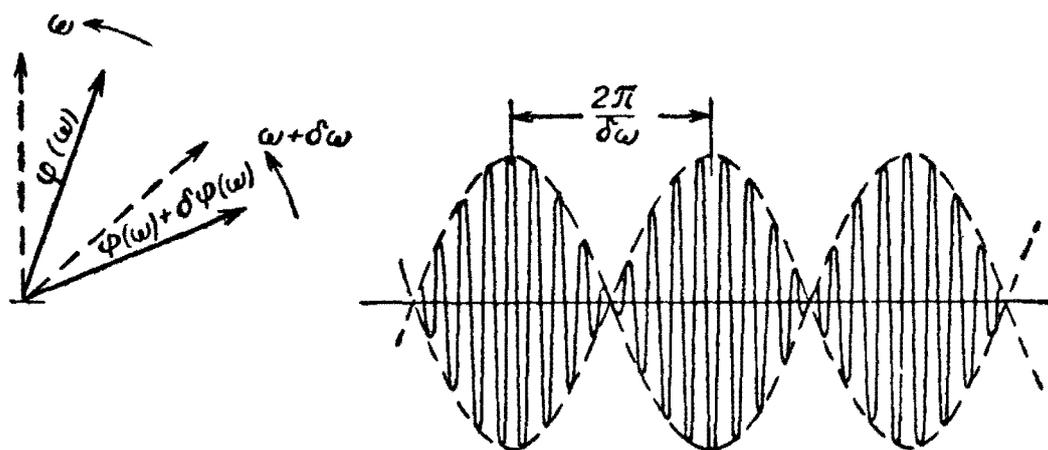


Рис. 61. Сигнал, получающийся в результате биений двух смежных частот ω и $\omega + \delta\omega$.

его воспроизводится без искажений. Если, как это обычно имеет место, крутизна фазовой характеристики непостоянна, то средняя крутизна ее будет определять запаздывание всего сигнала, а искажения сигнала будут вызывать небольшие изменения значений $\varphi(\omega)/\omega$ для каждой составляющей.

Вопрос об искажении формы сигнала становится еще яснее при рассмотрении относительного фазового сдвига между соседними составляющими. Возьмем составляющие с частотами ω и $\omega + \delta\omega$ и фазами $\varphi(\omega)$ и $\varphi(\omega) + \delta\varphi(\omega)$. При сложении этих составляющих получаются «биения», представленные на рис. 61, с частотой огибающей $\delta\omega$. Векторы, соответствующие составляющим, вращаются с угловыми скоростями ω и $\omega + \delta\omega$ и совпадают по фазе через равные промежутки вре-

мени, давая амплитудные значения огибающей. Если векторы будут сдвинуты по фазе на $\varphi(\omega)$ и $\varphi(\omega) + \delta\varphi(\omega)$, то их относительный сдвиг фаз будет $\delta\varphi(\omega)$. Для пробега этого угла потребуется время $\delta\varphi(\omega)/\delta\omega$ и амплитудные значения огибающей будут получаться позднее на это время. Это время $\delta\varphi(\omega)/\delta\omega$, называемое временем „запаздывания огибающей“, равно крутизне касательной к фазовой характеристике на частоте ω . Оно обычно отличается от запаздывания самой составляющей сигнала частоты ω .

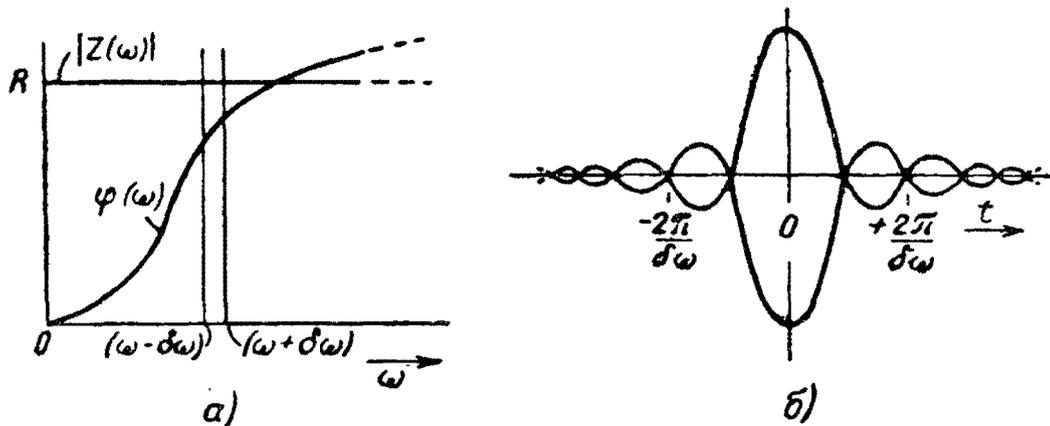


Рис. 62. Элементарный сигнал, соответствующий частотной группе: а) равномерная амплитудная и нелинейная фазовая характеристики цепи; б) элементарный сигнал, соответствующий частотной группе $\omega \pm \delta\omega$ (показана только огибающая).

Кривые запаздывания огибающей, представленные в функции от частоты, дают более наглядное представление об искажениях сигнала, чем кривые фазового сдвига несущей $\varphi(\omega)/\omega$. Влияние различных частей спектра на форму сигнала яснее видно из рассмотрения участка спектра, соответствующего узкому элементу характеристики цепи (рис. 62,а), заключенному между частотами $(\omega - \delta\omega)$ и $(\omega + \delta\omega)$. Предполагается, что в этом узком диапазоне фазовая характеристика линейна, а амплитудная постоянна. Такой участок спектра может быть назван „частотной группой“ и соответствует сигналу*, форма которого показана на рис. 62,б. Импульс энергии представляет собой модулированные колебания с несущей частотой ω (на рисунке показана только огибающая этих колебаний). Такой импульс будет соответствовать каждой частотной группе, на которые разделена вся характеристика. Выражение для огибающей будет $\frac{\sin \delta\omega t}{\delta\omega t}$. Запаздывание оги-

* Форма этого сигнала вычерчена точно на рис. 29. Она может быть определена по спектру прямоугольного импульса на основе обратного преобразования Фурье.

бающей каждого такого импульса определяется опять, как $\delta\varphi(\omega)/\delta\omega$, если $\delta\omega \ll \omega$ и из этой „кривой запаздывания огибающей“ можно видеть, в общем, зависимость между нелинейностью фазовой характеристики и временем нарастания и затухания сигнала.

Если амплитудная характеристика также неоднородна, то эта зависимость становится чрезвычайно сложной, так как частотная группа на рис. 62 не имеет постоянной амплитуды и форма элементарного сигнала будет асимметрично искажена. Влияние каждой частотной группы на форму сигнала будет различным, и простых кривых $\delta\varphi(\omega)/\delta\omega$ будет недостаточно для оценки полных искажений сигнала.

Наибольшее влияние на скорость нарастания сигнала при модуляции несущей частоты ω_0 скачком (рис. 64,а) будет оказывать та частотная группа, которая имеет минимальное время задержки и располагается в точке, соответствующей минимуму $\delta\varphi(\omega)/\delta\omega$. Но основная часть энергии такого сигнала сконцентрирована вокруг несущей частоты ω_0 и следовательно главная часть выходного сигнала запаздывает на время запаздывания огибающей в точке ω_0 . Таким образом, минимальное время нарастания такого сигнала должно быть равно

$$\left[\frac{\delta\varphi(\omega)}{\delta\omega} \right]_{\omega_0} - \left[\frac{\delta\varphi(\omega)}{\delta\omega} \right]_{\min} \quad (209)$$

Если подаваемый на вход цепи сигнал имеет такую форму, что спектр его достаточно однороден (например, короткий импульс), то вызываемый им сигнал должен иметь заметную амплитуду в течение времени

$$\left[\frac{\delta\varphi(\omega)}{\delta\omega} \right]_{\max} - \left[\frac{\delta\varphi(\omega)}{\delta\omega} \right]_{\min} \quad (210)$$

и главная часть энергии будет запаздывать на время, определяемое средней крутизной $\delta\varphi(\omega)/\delta\omega$. Следовательно, вследствие отклонения фазовой характеристики от линейности (рис. 63,а) могут возникать серьезные искажения во времени нарастания и ширине сигнала.

Общее влияние фазовых искажений на сигнал скачкообразной формы или на колебания, модулированные скачком напряжения, проявляется в запаздывании сигнала и увеличении времени нарастания и, кроме того, сопровождается иногда выбросами. Это показано на рис. 51, хотя в приведенном на нем примере играют некоторую роль также амплитудные искажения, вызывающие постепенное затухание составляющих более высоких частот. Хотя нарастание сиг-

нала происходит в течение некоторого конечного времени трудно определить точную цифру запаздывания всего сигнала. Его можно считать приблизительно равным времени, в течение которого величина сигнала достигает половины амплитудного значения*. Такой оценки в практике часто вполне достаточно при условии, что: 1) фазовая характеристика не отклоняется с изменением частоты слишком резко от линейной формы, т. е. что $d^2\varphi(\omega)/d\omega^2$ мало, и 2) амплитудная характеристика достаточно равномерна.

Точная форма кривой нарастания сигнала и выбросов, если они имеют место, зависит от формы фазовой характеристики. Если эта характеристика обращена выпуклостью вниз,

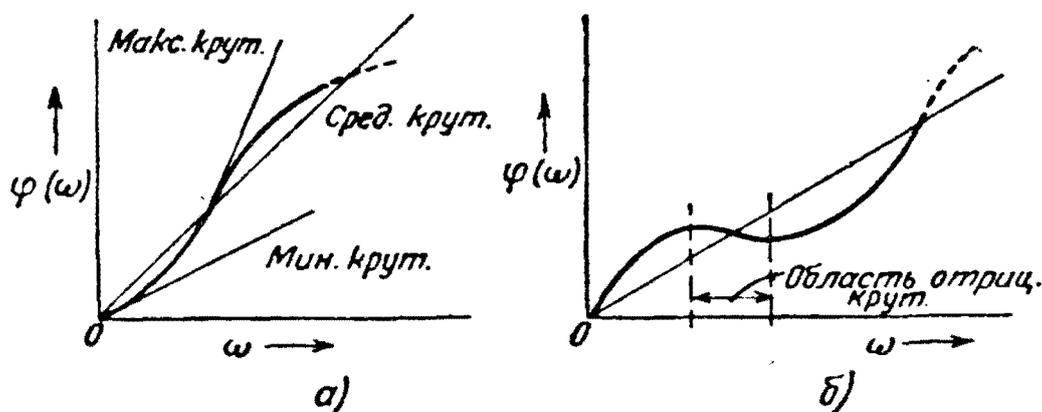


Рис. 63. Возможные отклонения фазовой характеристики от идеальной линейности:

а) характеристика с переменным значением $\delta\varphi(\omega)/\delta\omega$; б) характеристика с участком отрицательных значений $\delta\varphi(\omega)/\delta(\omega)$.

то составляющие более высоких частот будут запаздывать относительно больше, чем составляющие низких частот, в результате чего время нарастания сигнала увеличивается, а выбросы уменьшаются.

Если характеристика обращена выпуклостью вверх, составляющие высоких частот будут запаздывать относительно меньше, чем составляющие низких частот, сигнал будет нарастать круче и иметь заметные выбросы. Некоторые цепи могут иметь фазовую характеристику с отрицательной крутизной, хотя бы на некотором участке диапазона частот (рис. 63, б). Это не означает, что сигнал на входе цепи появляется раньше, чем он подан на ее входные зажимы, а только то, что отдельные составляющие ускоряются больше, чем другие, так как участки с отрицательной крутизной должны накладываться на участки со средней положительной крутизной.

* Это подтверждается достаточно хорошо кривыми рис. 51 и 52.

41. Воспроизведение сигнала, модулированного по амплитуде, и его огибающей

В системах с амплитудной модуляцией основной интерес представляет вопрос об искажении формы огибающей, так как она содержит передаваемую информацию.

Для оценки этих искажений можно воспользоваться важной теоремой, значительно упрощающей расчеты частотных искажений в канале.

В § 16 главы II было показано, что спектр колебаний, модулированных по амплитуде, симметричен относительно несущей частоты ω_0 и имеет одинаковую форму для любых частот ω_0 , включая нулевую частоту.

Это значит, что спектр модулированных колебаний будет идентичен со спектром огибающей, но сдвинут относительно его по оси частот. Эта теорема была очень просто доказана для модуляции по синусоидальному закону, но она должна быть также справедлива для колебаний, модулированных по любому периодическому или непериодическому закону, так как ее можно применить отдельно к каждой синусоидальной составляющей огибающей. (Теорема иллюстрируется рис. 18 и 19). Этот же принцип был применен в главе II к векторной диаграмме (рис. 20), что привело к понятию о неподвижном векторе несущей частоты и двух векторах боковых частот, вращающихся в противоположных направлениях.

Рассмотрим воздействие амплитудно-модулированных колебаний на полосовой фильтр с идеально симметричной частотной характеристикой относительно ω_0 . В качестве примера на рис. 64,а приведены колебания, модулированные скачком напряжения, и спектр этих колебаний, наложенный на частотные характеристики полосового фильтра. Спектр сигнала на выходе фильтра будет также строго симметричен, и поэтому несущая частота ω_0 может быть приведена к нулю.

Огибающая этого сигнала может быть получена из совместного рассмотрения спектра огибающей модулированных колебаний (т. е. скачкообразной волны, рис. 64,б) и характеристик эквивалентного фильтра нижних частот, являющихся характеристиками полосового фильтра, приведенными к нулевой средней частоте.

Эта теорема верна только приблизительно, так как неизбежна некоторая асимметрия характеристик полосового фильтра, даже фильтра типа K (см. § 30), хотя точность практически вполне достаточна в большинстве случаев.

Если несущая частота ω_0 не совпадает со средней частотой фильтра, то теорему нельзя применить непосредственно, так как спектр сигнала на выходе фильтра не будет симметричен. Однако ее можно применить и к таким случаям в видоизмененной форме, как это будет показано в седьмой главе.

Следует заметить, что эквивалентность характеристик не должна быть обязательно связана с возможностью воспроизведения реальных эквивалентных схем с такими характеристиками, хотя следует отметить осуществимость фильтров нижних частот и полосовых фильтров, дающих одинаковые,

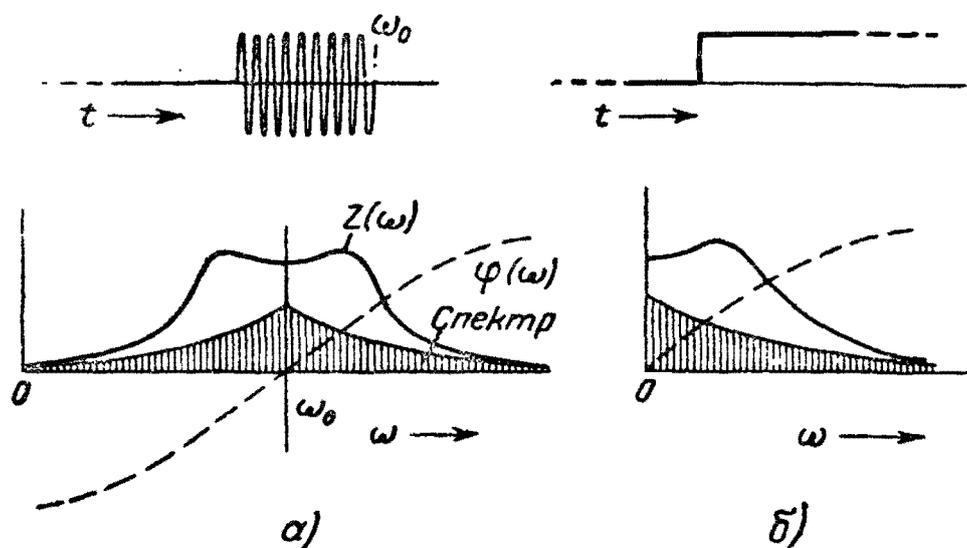


Рис. 64. Воспроизведение модулированного сигнала и его огибающей: а) питание полосового фильтра несущей частотой, модулированной скачком; б) питание фильтра нижних частот огибающей колебаний а.

в известных пределах точности, искажения огибающей модулированных колебаний и самих модулирующих колебаний, соответственно.

Из этой теоремы следует, что искажения сигнала, вычисленные для фильтра нижних частот, соответствуют искажениям огибающей модулированных колебаний в эквивалентном полосовом фильтре.

На рис. 65, б показано, например, напряжение, создаваемое на цепи из параллельно соединенных R и C скачком тока, а рис. 65, а — сигнал на выходе эквивалентного полосового контура, настроенного на частоту ω_0 , при воздействии на него колебаниями с несущей частотой ω_0 , модулированными скачкообразной волной. Эквивалентность будет достаточно строгой, если значение добротности Q настроенного контура высоко (т. е. если полоса его относительно узкая).

Эти кривые могут быть отнесены также к форме сигналов на выходе соответствующих цепей-двойников (см. § 28)

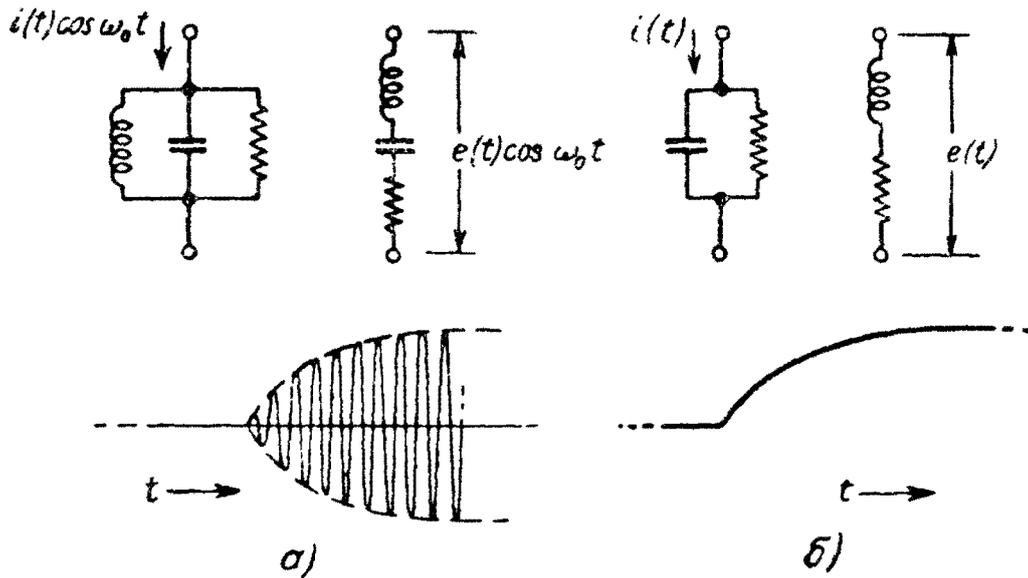


Рис. 65. Воспроизведение несущей, модулированной скачком, и скачка эквивалентными фильтрами: полосовым (а) и нижних частот (б).

показанных на этом же рисунке, возбужденных идентичным по форме скачком напряжения.

42. Теорема суперпозиции. Определение реакции цепи на сигнал сложной формы по известной реакции на элементарный сигнал

Реакция линейной цепи на одиночный сигнал сложной формы, заданной графически или аналитически, может быть определена, если разложить сигнал на некоторое число налагающихся друг на друга скачков некоторой амплитуды, начинающих действовать в соответствующее время (рис. 66,а). Сигнал в виде единичного скачка является основным в анализе переходных процессов и, с этой точки зрения, следует рекомендовать пользоваться именно им, так как все остальные кривые могут быть получены путем соответствующего сложения. Однако, как будет показано дальше, имеются определенные преимущества в разделении сигнала на узкие прямоугольные импульсы (рис. 66,б). Между этими двумя типами элементарных сигналов существует простое соотношение.

В обоих случаях вводится определенное приближение, так как скачки имеют конечную амплитуду, а импульсы конечную длительность, хотя практически можно получить

любую точность, если брать эти элементы достаточно малыми.

Этот принцип может быть применен непосредственно к огибающей модулированных по амплитуде колебаний, совместно с разобранный в предыдущем параграфе теоремой, и сигнал на выходе симметричного полосового фильтра может быть вычислен путем определения реакции эквивалентной схемы нижних частот на скачок напряжения или импульс, с последующим приведением к несущей частоте.

Суммирование сигналов, создаваемых отдельными скачками, может быть выполнено аналитически при графическом задании кривой, вследствие чего процесс переходит из численного приближенного метода в точный метод анализа.

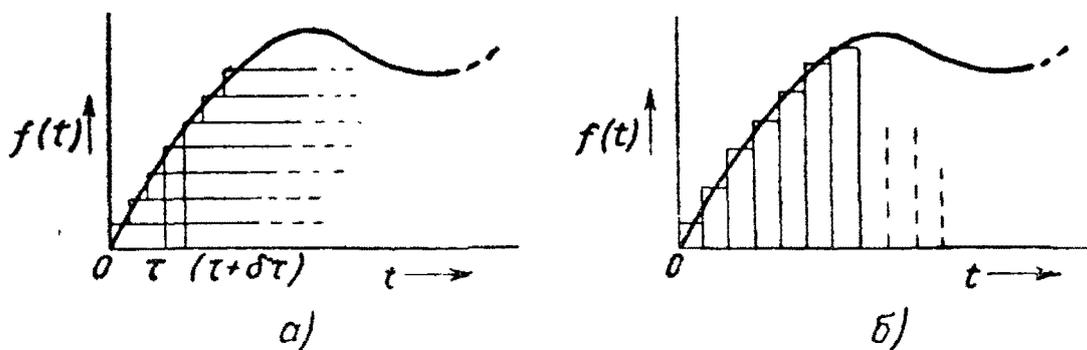


Рис. 66. Применение теоремы суперпозиции:

а) деление сигнала на скачки; б) деление сигнала на импульсы.

Предположим, что требуется определить сигнал на выходе цепи, создаваемый входным сигналом $f(t)$ известной аналитической формы и что сигнал $h(t)$ *, создаваемый на выходе ее единичным скачком, уже известен. Рассмотрим действие элементарного скачка, начавшегося в момент $t = \tau$ (рис. 66).

Величина сигнала $f(t)$ в этой точке равна $f(\tau)$, и поэтому значение напряжения скачка равно

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} \delta\tau,$$

* Функция $h(t)$ играет большую роль в операционном исчислении и называется „переходной проводимостью“. Если цепь состоит из одного звена, она численно равна току в звене при приложении к нему скачка напряжения, имеющего значение, равное единице (единичного скачка). Таким образом напряжение E , приложенное к цепи в момент τ , вызовет ток, равный $E \cdot h(t - \tau)$. Аналогично функция $h(t)$ может быть „переходным сопротивлением“, если через цепь пропущен единичный скачок тока и она численно равна падению напряжения на цепи.

где $\delta\tau$ — временной интервал между соседними скачками. Сигнал на выходе цепи, создаваемый элементарным скачком, равен

$$f'(\tau) h(t - \tau) \delta\tau; \quad (211)$$

[где $f'(\tau) = df(\tau)/d\tau$] в любой момент времени после начала действия этого скачка. Отсюда следует, что в любой момент времени t результирующий сигнал на выходе цепи вследствие действия всех скачков определится как

$$\sum_{\tau=0}^{\tau=t} f'(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (212)$$

Если интервал $\delta\tau$ взят бесконечно малым, то суммирование переходит в интегрирование и результирующий сигнал равен

$$\int_0^t f'(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (213)$$

Этот интеграл, известный под названием интеграла Дюамеля, может быть представлен в нескольких тождественных формах.

Если сигнал $h(t)$, создаваемый на выходе цепи единичным скачком, определен аналитически, то это выражение можно применить для вычисления сигнала на выходе цепи, создаваемого по данным на ее вход сигналам любой заданной формы $f(t)$, если интеграл Дюамеля может быть решен.

Переменная τ является только параметром интегрирования и исчезает при подстановке пределов интегрирования.

Простейшим примером применения принципа суперпозиции является определение сигнала на выходе цепи при подаче на ее вход прямоугольного импульса длительностью T_1 , если известна функция $h(t)$, создаваемая единичным скачком. Можно рассматривать импульс состоящим из двух скачков противоположных знаков, один из которых начинает действовать позднее на время T_1 . На рис. 67, а в качестве примера показана форма напряжения $u_1(t)$, создаваемого на контуре с потерями прямоугольным импульсом тока различной длительности T_1 в масштабе постоянной времени rC цепи. Эти кривые построены следующим образом: сначала была построена кривая сигнала $h(t)$, создаваемого единичным скачком (в данном случае $h(t)$ легко определяется из решения дифференциального уравнения). Затем эта же кривая была вычерчена

в перевернутом виде со сдвигом по оси времени на T_1 , после чего обе кривые были сложены. Интересно заметить, что рассмотренная цепь обычно применяется в качестве анодной нагрузки в телевизионных усилителях, например, в схеме на

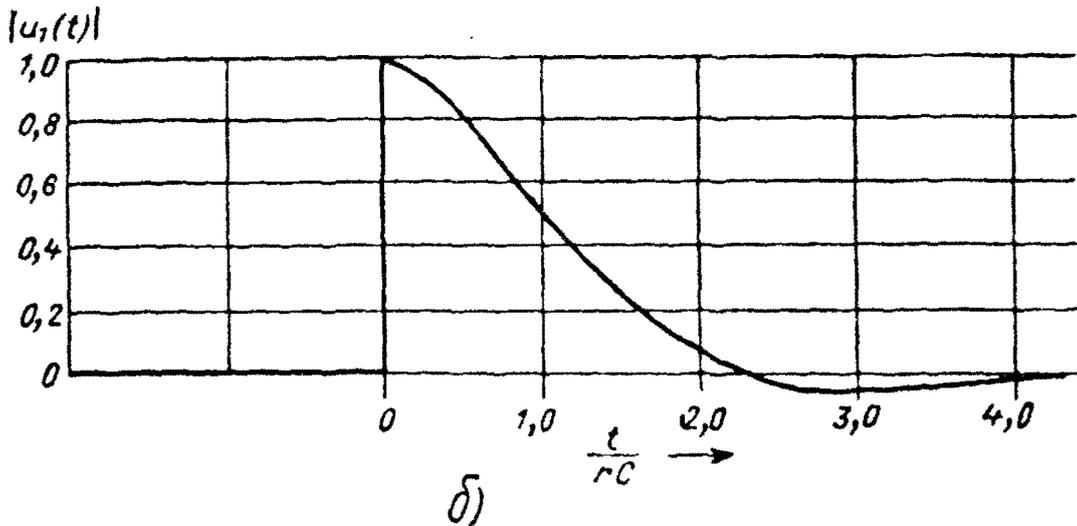
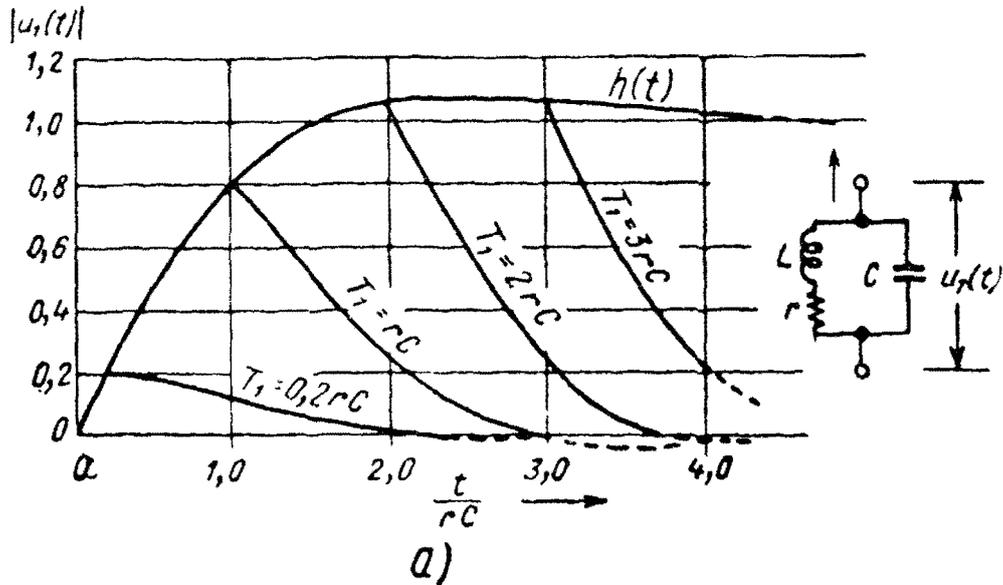


Рис. 67. Реакция цепи на скачок и прямоугольный импульс:
 а) реакция цепи на прямоугольный импульс длительности T_1 , вычисленная по реакции на скачок. $L/Cr^2 = Q^2 = 0,5$; б) реакция цепи на импульс бесконечно малой длительности $T_1 \rightarrow 0$.

рис. 51 (добротность цепи $Q = 1/\sqrt{2}$). Из приведенных кривых видно, что с уменьшением длительности T_1 передаваемого импульса, форма выходного напряжения становится все более несимметричной, с конечным временем нарастания и бесконечным временем спада, что особенно заметно, если длительность импульса мала по сравнению с постоянной времени цепи.

В пределе при $T_1 \rightarrow 0$ сигнал нарастает почти мгновенно, хотя значение напряжения будет бесконечно малой величиной. Этот случай показан на рис. 67, б, на котором масштаб для напряжения взят в произвольных единицах. Он соответствует действительно импульсному или „ударному“ возбуждению цепи, когда энергия сообщается ей в течение бесконечно малого отрезка времени, так что состояние цепи не изменяется до прекращения возбуждения. Следовательно, в цепи будут иметь место свободные или „нормальные“ колебания. Можно показать, что форма сигнала в цепи при воздействии на нее очень короткого импульса будет определяться производной от переходной проводимости $h(t)$. (Следует помнить, что это относится только к форме, а не величине сигнала). Если положительный скачок, приложенный к цепи в момент $t = 0$, будет создавать сигнал $h(t)$, то сигнал, вызываемый отрицательным скачком, приложенным в момент $t = T_1$, будет $-h(t - T_1)$. Тогда прямоугольный импульс длительностью T_1 создаст на выходе цепи сигнал $A(t)$, равный

$$A(t) = h(t) - h(t - T_1). \quad (214)$$

Пусть теперь T_1 становится очень малым. Обозначим его через δt и разделим на него обе части уравнения (214)

$$\frac{A(t)}{\delta t} = \frac{h(t) - h(t - \delta t)}{\delta t}. \quad (215)$$

В пределе при $\delta t \rightarrow 0$ в правой части получится производная $dh(t)/dt$, а в левой — бесконечно малая амплитуда сигнала.

Практически это может иметь место при передаче очень коротких импульсов, длительность T_1 которых мала по сравнению с постоянной времени цепи (см. рис. 67).

43. Реакция цепи на очень короткие импульсы

Реакцию цепи на очень короткие импульсы можно также определить, пользуясь методами установившегося режима. При этом можно получить интересные материалы по частотному спектру сигнала на выходе цепи.

Импульс бесконечно малой длительности δt может быть разложен на непрерывный и равномерный (от нулевой до бесконечно высокой частоты) спектр, все составляющие которого косинусоидальны и имеют одинаковую бесконечно малую амплитуду. Практически, если длительность импульса мала по сравнению с постоянной времени цепи, то спектр

его будет почти равномерным во всей полосе частот, пропускаемых цепью. Эту равномерность спектра можно видеть из рис. 29, если рассматривать сопряженный спектр прямоугольного импульса длительностью T_1 . На частотах $\pm 1/T_1$ плотность спектра равна нулю. Если длительность импульса T_1 уменьшается и становится бесконечно малой, то эти значения частоты становятся равными $\pm \infty$, так что плотность спектра будет постоянной в пределах конечной полосы частот. О неравномерности спектра импульса конечной длительности T_1 в любой заданной полосе частот можно судить по кривым рис. 29, сравнивая ширину полосы с частотой $1/T_1$. Непрерывные спектры косинусоидальных членов, имеющих бесконечно малые амплитуды, могут быть просуммированы, так что бесконечно короткий импульс I равен

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t d\omega. \quad (216)$$

Такой импульс обладает бесконечно малой энергией*.

Если такой импульс тока приложить к зажимам цепи, то спектр созданного им напряжения будет идентичен с частотной характеристикой цепи (если семейство кривых выражает зависимость какой-то величины от частоты, то еще нельзя сказать, представляют ли они частотную характеристику некоторой цепи или непрерывный спектр импульса—они показывают только распределение синусоидальных членов с определенными амплитудами и фазами).

Пусть характеристики цепи будут $|Z(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$. Напряжение $u(t)$, создаваемое импульсом, приложенным в момент $t=0$, будет

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(\omega)| \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega, \quad (217)$$

или

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [|Z(\omega)| \cos \varphi(\omega) \cos \omega t + |Z(\omega)| \sin \varphi(\omega) \sin \omega t] \cdot d\omega. \quad (218)$$

$$u(t) = u_c(t) + u_s(t). \quad (219)$$

* Написанный в такой форме интеграл не может быть вычислен. В связи с рассматриваемым вопросом он введен только для обозначения суммы бесконечного спектра членов вида $\cos \omega t$.

Выражение (218) аналогично выражению (186), за исключением того, что спектр приложенного импульса $a(\omega)$ здесь постоянный. Составляющая $u_c(t)$ представляет напряжение, обусловленное действительной частью характеристики цепи $|Z(\omega) \cos \varphi(\omega)$. Как видно, она выражается интегралом Фурье и симметрична относительно $t=0$, так как содержит только косинусные члены. Аналогично, составляющая $u_s(t)$ обусловлена мнимой частью характеристики и также выражается интегралом Фурье, но имеет симметрию 2-го рода относительно $t=0$. Это частный случай общего заключения, сделанного в § 35 (рис. 53) в части, касающейся симметрии действительной и мнимой составляющих выходного сигнала.

Так как до $t=0$ в цепи не должно быть напряжения, составляющие $u_c(t)$ и $u_s(t)$ должны быть одинаковыми по форме и взаимно компенсироваться на участке $t < 0$. На основании этого можно сделать заключение, что частотная функция полного сопротивления реальной цепи должна быть такова, чтобы интегралы Фурье от ее действительной и мнимой частей были идентичны по форме, но обладали симметрией 1-го и 2-го рода соответственно.

В § 36 в качестве примера была рассмотрена реакция цепи из параллельно соединенных R и C на единичный скачок тока, что может иметь место в усилителе на тетроде (рис. 54) при подаче на его сетку единичного скачка напряжения. Рассмотрим теперь воздействие на эту цепь идеализированного импульса, выражаемого интегралами Фурье от характеристики полного сопротивления цепи. Эта характеристика дана уравнением (197) и напряжение, создаваемое импульсом тока, будет

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} \cos \omega t d\omega + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \sin \omega t d\omega = u_c(t) + u_s(t), \quad (220)$$

выраженное в виде суммы действительной и мнимой частей.

В соответствии с таблицей интегралов Фурье можно установить, что эти интегралы идентичны для положительных, но имеют разные знаки при отрицательных значениях t , так что $u_c(t)$ — симметрична, а $u_s(t)$ — имеет симметрию 2-го

рода относительно $t=0$. Эти интегралы соответственно равны

$$u_c(t) = u_s(t) = \frac{1}{2} e^{-t/RC} \quad \text{для } t > 0$$

$$u_c(t) = -u_s(t) = \frac{1}{2} e^{t/RC} \quad \text{для } t < 0,$$

так что сумма их для $t < 0$ равна нулю.

Применение этой теоремы может значительно сберечь время, так как при расчетах переходных процессов достаточно вычислить интеграл Фурье только для действительной или только для мнимой части.

Если определена реакция цепи на очень короткий импульс, то реакция на единичный скачок определяется интегрированием, выполняемым графически или другим путем, а реакция на сигнал любой другой формы может быть определена по принципу суперпозиции.

До сих пор рассматривалась форма напряжения, возникающего в цепи при воздействии на нее импульса тока. Однако выведенные соотношения между действительной и мнимой частями характеристик применимы и для определения формы тока при воздействии на цепь импульса напряжения.

44. Последовательное дифференцирование и интегрирование функций

В этом параграфе рассматривается еще одна простая теорема, которая позволяет распространить расчеты переходных процессов, сделанные для одного случая, на многие другие случаи.

Реакция цепи на производную от воздействующего на него сигнала $f(t)$ равна в отношении формы (но не величины сигналов) производной от выходного сигнала, вызванного $f(t)$.

Мы уже имели дело с частным случаем. В § 42 было показано, что реакция цепи на импульс бесконечно малой длительности равен производной от напряжения, создаваемого в этой цепи единичным скачком (рис. 67, а и б). Но бесконечно узкий импульс, без учета его абсолютной величины, является производной от скачкообразного сигнала. Спектр $b(\omega)$ синусоидальных составляющих скачка определяется уравнением (193), так что любая составляющая с частотой ω выражается как

$$b(\omega) \sin \omega t = \frac{I}{\pi} \frac{\sin \omega t}{\omega}. \quad (221)$$

Дифференцирование дает

$$\frac{d}{dt} [b(\omega) \sin \omega t] = \frac{I}{\pi} \cos \omega t, \quad (222)$$

причем амплитуда $\frac{I}{\pi}$ не зависит от частоты. Таким образом производная скачка имеет однородный спектр из косинусоидальных членов с одинаковой амплитудой, т. е. спектр прямоугольного импульса бесконечно малой длительности (см. § 43).

Эта теорема может быть доказана в общем виде для линейной цепи из рассмотрения любого члена $e(\omega)$ спектра приложенного сигнала

$$e(\omega) = A \sin(\omega t + \theta). \quad (223)$$

Производная равна

$$\frac{d}{dt} e(\omega) = A\omega \cos(\omega t + \theta). \quad (224)$$

На выходе цепи с характеристиками $|Z(\omega)|$, $\varphi(\omega)$ эти составляющие создадут сигналы

$$|Z(\omega)| A \sin[\omega t + \theta - \varphi(\omega)] \quad (225)$$

и

$$|Z(\omega)| A\omega \cos[\omega t + \theta - \varphi(\omega)], \quad (226)$$

соответственно.

Уравнение (226) является очевидной производной по времени от уравнения (225). Если это справедливо для одной составляющей, то, по принципу суперпозиции, это будет справедливо для сигнала любой сложной формы.

Эта теорема справедлива и для интеграла от $f(t)$, а также при любом количестве последовательных дифференцирований и интегрирований.

Наиболее частым применением ее является определение формы сигнала, вызываемого в цепи прямоугольными коле-

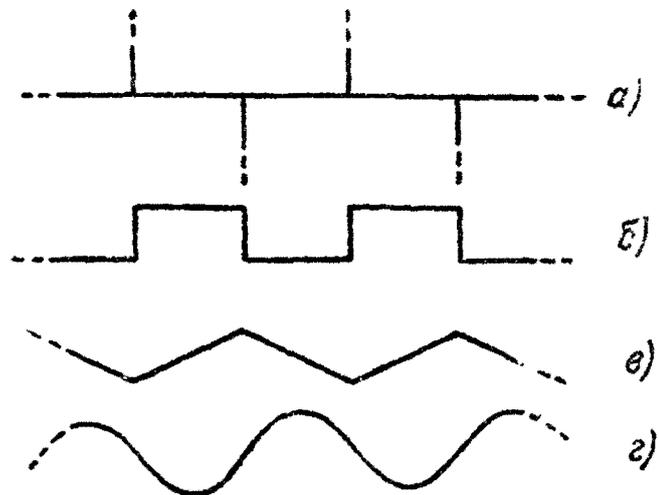


Рис. 68. Последовательное интегрирование кривых:

а) бесконечно-узкие импульсы; б) первый интеграл—прямоугольные колебания; в) второй интеграл—линейная кривая нарастания; г) третий интеграл—кривая параболической формы.

баниями по вычисленному сигналу, вызываемому узким импульсом с помощью графического или численного интегрирования. Вопрос же о величине сигнала на выходе цепи очень часто может быть решен из рассмотрения установившегося процесса или по реакции цепи на постоянный ток.

Если начать с определения сигнала, вызываемого бесконечно узким импульсом, то последовательное интегрирование даст форму сигнала, вызываемого прямоугольными и треугольными колебаниями, а также колебаниями параболической формы как второй, так и всех высших степеней (рис. 68).

ГЛАВА V

ИДЕАЛИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

45. Обоснование необходимости применения идеализации

Применение интеграла Фурье для определения реакции цепи на кратковременные сигналы, к сожалению, очень часто приводит к сложным или не интегрируемым задачам, хотя метод сам по себе, в принципе, очень прост. Обычно возникают трудности математического характера, не затрагивающие технической сущности вопроса. Тем не менее, применение этого метода для анализа переходных процессов чрезвычайно важно не только потому, что он позволяет решать задачу в общем виде, но и потому, что он может быть применен для практических расчетов, если ввести так называемые идеализированные условия, приписывающие цепи некоторые свойства, которыми она в действительности не обладает. Пользование этим приемом может быть оправдано, поскольку это существенно упрощает расчеты и дает практически достаточно точные результаты, применять которые, однако, следует с учетом сделанных допущений.

При исследовании линий и цепей связи во многих случаях нет необходимости в точном вычислении реакции цепей на кратковременные сигналы. Часто требуется выяснить только некоторые основные вопросы, относящиеся, например, к ширине полосы, времени нарастания сигнала или помехам, создаваемым соседним каналом. В таких случаях сигнал можно рассматривать состоящим из элементарных скачков или коротких импульсов, содержащих предельно малую часть информации, передаваемой по каналу. Применение таких скачков или импульсов упрощает расчеты, как было показано в предыдущей главе, и не связано с приписыванием системе каких-либо физически неосуществимых свойств, за исключением того, что идеальные скачкообразные и импульсные

сигналы не могут создаваться в реальных цепях. Это обстоятельство важно тем, что оно подчеркивает разницу между аппроксимацией и идеализацией; скачки и импульсы могут воспроизводиться в физических цепях с любой желаемой степенью точности, хотя это и связано с известными трудностями.

При пользовании всеми рассмотренными методами приближенных расчетов (замена полосового фильтра эквивалентным фильтром нижних частот, применение ряда Фурье вместо интеграла Фурье, принцип суперпозиции, приведение несущей частоты к нулю) может быть получена любая степень точности.

При расчете цепей связи часто применяются приближения другого характера. Например, при расчете фильтров пренебрегают их активным сопротивлением или считают, что каждое звено фильтра нагружено характеристическим сопротивлением и т. д., вследствие чего характеристики реальных цепей отличаются от теоретических, но могут быть сделаны сколь угодно к ним близкими.

Теоретически упрощения не связаны никакими физическими ограничениями и определяются только необходимой степенью точности.

В тех случаях, когда расчеты переходных процессов упрощаются за счет введения физически не осуществимых характеристик цепей, полученные результаты являются идеализированными. Так, например, для получения интегралов Фурье, которые могли бы быть решены, и быстрой оценки соотношения между шириной полосы и временем нарастания сигналов и другими факторами можно воспользоваться характеристиками определенной геометрической формы.

Однако, как дальше будет показано, в таких идеализированных системах сигнал на выходе должен появляться до того, как приложен сигнал на вход, что явно физически невозможно. На основании этого можно сделать заключение, что характеристики такой формы не могут быть получены ни при какой комбинации электрических элементов. Форма характеристик реальных цепей определяется известными законами, поэтому нельзя ожидать, что выбранная для удобства расчетов характеристика будет подчиняться этим законам. Однако, если не делать поспешных отрицательных выводов из того, что при идеализации характеристик на выходе цепи получается сигнал конечной величины до момента $t = 0$, такие характеристики можно с успехом применять для приближенных расчетов.

46. Идеализация полосы пропускания и времени нарастания сигнала

Полоса пропускания любого реального фильтра является неопределенной величиной, так как все такие цепи реагируют в известной мере на сигналы „бесконечно высокой“ частоты. С точки зрения расчета переходных процессов нет большого смысла в том, чтобы теоретические частоты среза фильтра выбирались, как границы его полосы пропускания, хотя затухание фильтра, состоящего даже всего из нескольких звеньев, должно быстро возрастать около этих частот. Например, теоретическая частота среза для звена фильтра типа K на

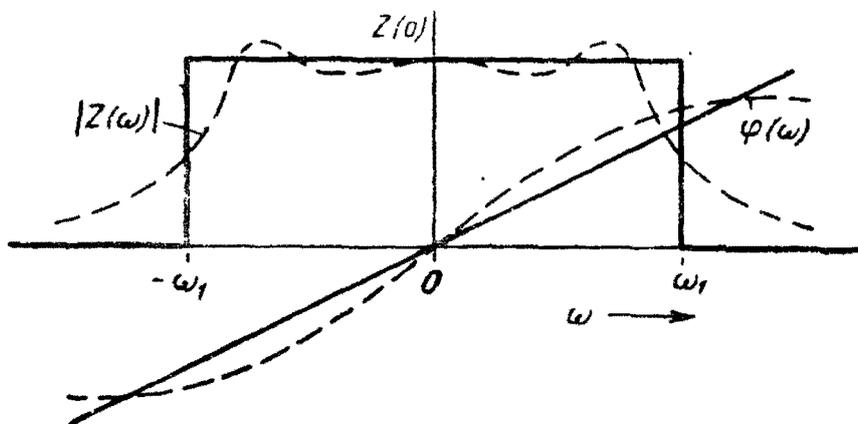


Рис. 69. Эквивалентная идеализированная прямоугольная характеристика (пунктиром изображена реальная характеристика, а сплошной линией эквивалентная ей идеализированная).

рис. 33 получается при $\omega CR = 1,0$. Имеется также много цепей, нашедших широкое применение, не являющихся фильтрами в полном смысле этого слова и не имеющих частоты среза.

При выборе частоты среза для идеализированных расчетов имеет смысл брать ее величину ω_1 такой, чтобы площадь, ограниченная идеализированной амплитудной характеристикой, равнялась площади, ограниченной реальной характеристикой для частот от нуля до бесконечности (рис. 69), т. е.

$$\omega_1 = \frac{1}{Z(0)} \int_0^{\infty} |Z(\omega)| d\omega. \quad (227)$$

Характеристики изображены на рис. 69 в сопряженной форме для того, чтобы их можно было применить как к фильтру нижних частот, так и к полосовому фильтру.

Реальные характеристики изображены пунктирными линиями, а идеализированные — сплошными; идеализированная амплитудная характеристика равномерна в полосе частот от $-\omega_1$ до $+\omega_1$, а фазовая характеристика имеет постоянную крутизну $t_1 = \psi/\omega$, приблизительно равную средней крутизне реальной фазовой характеристики.

Если не учитывать фазовой характеристики, то обе амплитудные характеристики—реальная и идеализированная—будут соответствовать одинаковой максимальной скорости нарастания сигнала в цепи. Действительно, синусоидальные составляющие $b(\omega) \sin \omega t$ скачкообразной кривой все в фазе в момент $t=0$ и все имеют наибольшую крутизну в этой точке. Но крутизна (т. е. скорость нарастания) синусоидальной кривой в момент $t=0$ равна произведению частоты и амплитуды

$$\frac{d}{dt} [b(\omega) \sin \omega t] = \omega b(\omega) \cos \omega t, \quad (228)$$

так как при $t=0$ правая часть равна $\omega b(\omega)$. Максимальная скорость нарастания синусоидальной составляющей сигнала на выходе цепи с модулем передаточного сопротивления $|Z(\omega)|$, вызванного скачком, будет $|Z(\omega)| \omega b(\omega)$. Но плотность спектра $b(\omega)$ скачкообразной кривой величины I равна $I d\omega/\pi\omega$ [уравнение (196)], так что максимальная скорость нарастания пропорциональна $|Z(\omega)|$.

Суммируя скорости нарастания, так как каждая составляющая в одинаковой мере влияет на максимальную скорость нарастания результирующего сигнала, получим, что максимальная скорость нарастания сигнала, вызванного скачком, равна

$$\frac{I}{\pi} \int_0^{\infty} |Z(\omega)| d\omega, \quad (229)$$

т. е. равна произведению $\frac{I}{\pi}$ на площадь, ограниченную амплитудной характеристикой.

В случае прямоугольной идеализированной характеристики площадь (а, следовательно, и максимальная скорость нарастания сигнала) пропорциональна ширине полосы (это приблизительно верно и для реальных фильтров с характеристикой, близкой к прямоугольной). Таким образом, если площади, ограниченные идеализированной и реальной характеристиками (рис. 69), равны, то максимальная скорость нарастания сигнала в обоих случаях одинакова, хотя форма их различна.

Форма сигнала в цепи с идеализированной прямоугольной характеристикой легко может быть вычислена и служит для определения формы сигнала в любой реальной цепи, для которой применяется идеализация.

Спектр скачкообразной кривой величины I выражается уравнением (194)

$$f_s(t) = \frac{I}{2} + \frac{I}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \quad [(194)]$$

и идеализированный фильтр будет пропускать все составляющие этого спектра до частоты ω_1 без искажения, но с задержкой на время t_1 . Все остальные составляющие, не входящие в эту полосу, не будут пропускаться.

Вызываемый скачком сигнал $h(t)$ будет равен

$$h(t) = \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\omega_1} \frac{\sin \omega (t - t_1)}{\omega} d\omega, \quad (230)$$

где $\frac{E}{2}$ — постоянная составляющая. Значение $E = IZ(0)$ определяет номинальный уровень сигнала.

Входящий в это выражение интеграл очень важен и хотя он не может быть развернут в виде алгебраической функции, очень удобен для многих расчетов. Этот интеграл называется „интегральным синусом“ и часто обозначается как $Si(\omega_1)$. Значения его можно найти в таблицах для любого значения частоты ω_1 , являющегося верхним пределом интегрирования.

Определяемый уравнением (230) сигнал $h(t)$ представлен на рис. 70 в виде графика в функции от $\omega_1 t$. Этот график является универсальным и применим к идеализированному фильтру с любой частотой среза ω_1 .

В графике необходимо отметить несколько заслуживающих внимания особенностей. Во-первых, колебания сигнала распространяются до бесконечности в направлении как положительных, так и отрицательных значений времени, так что независимо от того, какое время запаздывания t_1 будет принято, на выходе идеализированного фильтра будет определенный сигнал до того, как скачок подан на вход, что физически явно невозможно. На рис. 70 время запаздывания принято равным нулю, так как пока нет оснований для выбора какого-либо определенного значения. Физическая невозможность существования сигнала на выходе до $t = 0$ говорит о нереальности принятой формы частотной характеристики, что уже отмечалось раньше.

Во-вторых, что, вероятно, имеет большее значение, время нарастания сигнала в этой цепи, являющейся фильтром нижних частот с полосой ω_1 , равно π/ω_1 , если измерять его между точками, в которых касательная пересекает линии нулевого и установившегося уровней сигнала, т. е. оно равно времени, в течение которого сигнал нарастет до установившегося значения, если крутизна фронта будет все время равна максимальной. Это можно показать следующим образом.

Максимальная скорость нарастания, как уже было показано, должна быть такой же, как и в реальном фильтре с характеристикой, ограничивающей площадь, равную пло-

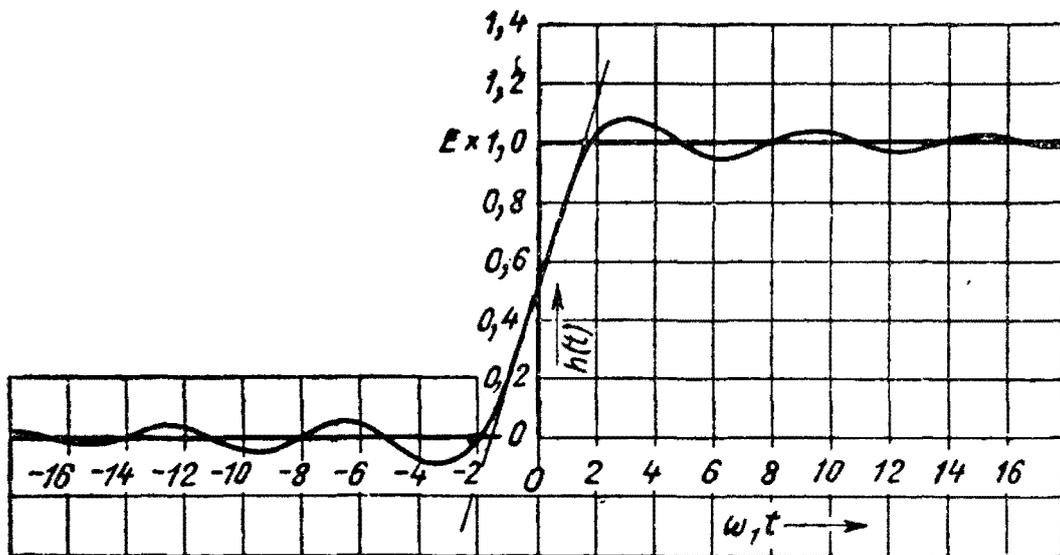


Рис. 70. Форма сигнала на выходе цепи с идеализированной характеристикой рис. 69 при возбуждении ее скачком.

щади идеализированной характеристики (рис. 69), и определяется уравнением (229). В идеализированном случае, поскольку площадь, ограниченная характеристикой, равна $|Z(0)|\omega_1$, максимальная скорость нарастания сигнала (рис. 70) будет $|Z(0)|\omega_1/\pi$. Но $|Z(0)|$ равно установившемуся значению сигнала E . Таким образом, максимальная скорость нарастания сигнала будет $E\omega_1/\pi$, а время нарастания до этого значения E будет π/ω_1 .

Следует заметить для быстрой прикидки времени нарастания, что время нарастания π/ω_1 , определенное по касательной к характеристике, равно половине периода частоты среза ω_1 , тогда как действительное время нарастания сигнала в идеализированной цепи, измеренное между низшей и высшей точками кривой, равно $2\pi/\omega_1$ или целому периоду частоты среза ω_1 , и кривая нарастания почти синусоидальна по форме.

В-третьих, график обладает симметрией 2-го рода относительно $t=0$ (если не учитывать времени запаздывания), являясь нечетной (синусоидальной) функцией. Выброс сигнала составляет 8,6% от установившегося значения E .

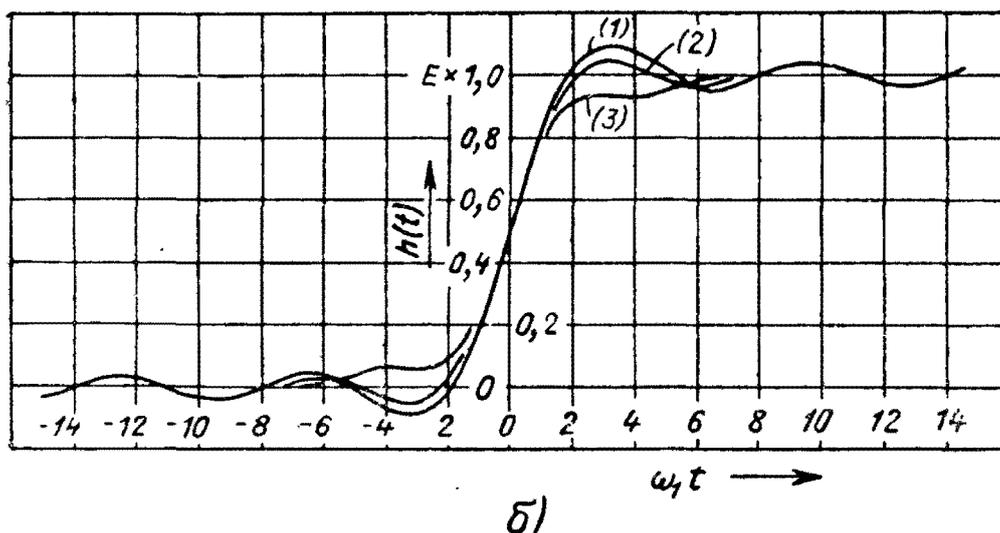
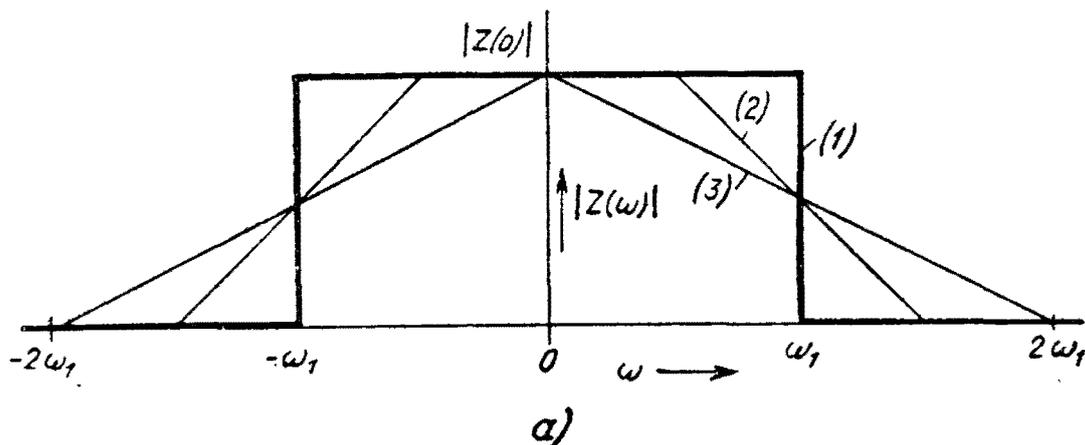


Рис. 71. Реакция фильтров с различными идеализированными характеристиками (1)_(2) и (3) на скачок тока.

а) идеализированные характеристики; б) форма выходного сигнала.

Наконец, период выброса приблизительно равен периоду частоты среза ω_1 . Эти значения величины и периода выброса справедливы только для данного типа идеализированного фильтра; для фильтров с более пологой кривой нарастания выбросы будут меньше. Достаточно точное представление о величине и периоде выброса (если не учитывать фазовых искажений) может быть получено из рассмотрения идеализированных характеристик других видов, например, представленных на рис. 29,а.

Эти кривые были использованы в главе II для того, чтобы показать обратимость формы спектра и кривой выход-

ного сигнала согласно преобразованиям Фурье. Таким образом, если взять кривую (а) в качестве частотной характеристики идеализированного фильтра, то кривая (б) будет являться формой сигнала на выходе фильтра при его возбуждении бесконечно узким импульсом (см. § 43 гл. IV)*, причем форма выходного сигнала при возбуждении скачком может быть найдена методом графического интегрирования. Наиболее удобными являются трапециoidalная и треугольная характеристики, приведенные на рис. 71,а вместе с графиками сигналов, вызываемых скачком (рис. 71,б). Графики показывают влияние уменьшения крутизны среза и при при-

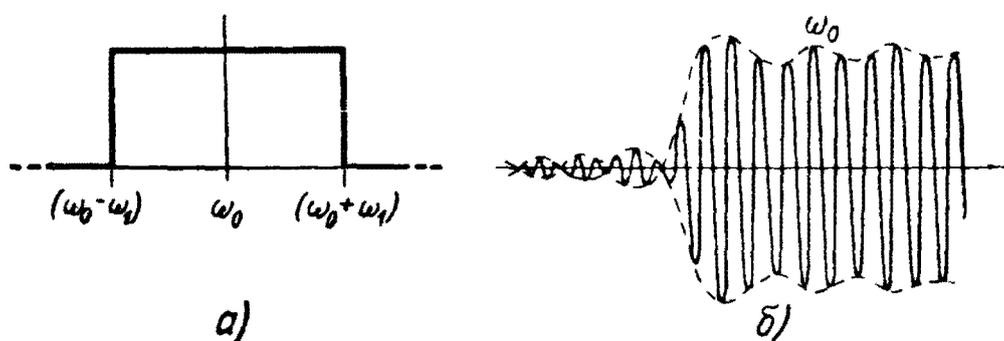


Рис. 72. Реакция полосового фильтра с идеализированной характеристикой на сигнал, модулированный скачком:
 а) идеализированная характеристика; б) выходной сигнал (точная форма огибающей приведена на рис. 70).

менении интерполяции могут дать достаточно точное приближение к форме сигнала в реальном фильтре во многих случаях. Все графики на рис. 71,б обладают симметрией 2-го рода и показывают наличие сигнала определенной амплитуды до $t=0$. Симметрия нарушается в реальных фильтрах с фазовой характеристикой, отличающейся от идеализированной, вследствие чего сигнал до $t=0$ должен исчезнуть, а выброс увеличиться. Графики сигналов на рис. 71,б показывают, что даже значительные отклонения амплитудной характеристики от прямоугольника не вызывают заметных изменений формы сигнала. Хотя все три характеристики на рис. 71 ограничивают одинаковые площади и имеют равную полосу между точками половинной амплитуды, они сильно отличаются по форме. Тем не менее, графики сигналов в цепях с такими характеристиками отличаются незначительными деталями, главным образом, формой первого выброса. Как

* Принцип преобразования Фурье был применен на рис. 29 а и б путем простой взаимной замены шкал времени и частоты.

правило, величина выброса уменьшается с уменьшением крутизны характеристики фильтра.

Графики сигналов в цепях с идеализированными характеристиками (рис. 71,б) можно рассматривать как огибающие в эквивалентных полосовых фильтрах, образованные переносом оси симметрии характеристик (рис. 70,а) в точку несущей частоты ω_0 . В соответствии с § 41, несущая частота сигнала на выходе фильтра будет ω_0 , а приложенный сигнал должен представлять собой незатухающие колебания несущей частоты ω_0 , модулированные скачкообразной кривой. Время нарастания огибающей при прямоугольной идеализированной характеристике фильтра с шириной полосы $\pm \omega_1$ (рис. 72) будет также π/ω_1 .

47. Идеализация характеристик, дающая при $t < 0$ сигнал, равный нулю

Согласно другому способу определения формы сигнала на выходе идеализированного фильтра сигнал равен нулю при $t < 0$, и форма выходного сигнала получается ближе к действительной. Этот способ основан на несколько ином аналитическом выражении скачкообразной кривой.

Выражение (230) для сигнала на выходе идеализированного фильтра было выведено на основе уравнения (194) для скачкообразной кривой. Последнее было получено из прямоугольного колебания с периодом T_0 (рис. 25) и началом координат в точке 2 при увеличении T_0 до бесконечности. Форма сигнала на рис. 70 была получена при ограничении спектра скачкообразной кривой частотой ω_1 [верхний предел интегрирования в уравнении (230)]. Как видно из рисунка, этот сигнал в момент $t=0$ имеет величину $0,5E$, независимо от величины ω_1 . Если ω_1 стремится к бесконечности, то сигнал на выходе будет приближаться по форме к приложенному скачкообразному сигналу и, следовательно, нужно принять, что этот скачкообразный сигнал имеет значение $0,5$ в точке разрыва непрерывности при $t=0$.

Другое выражение для скачкообразной кривой можно получить из кривой двойного скачка (рис. 73), среднее значение которой за период T_0 (постоянная составляющая) равно

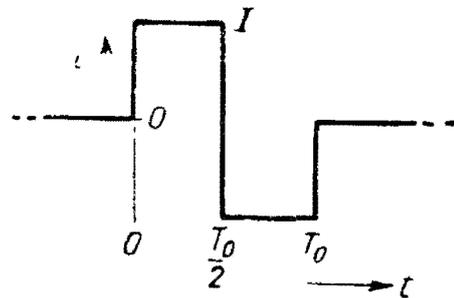


Рис. 73. Форма переменного тока, которая может быть преобразована в скачок.

нулю. Если T_0 стремится к бесконечности, то искомое выражение будет иметь вид

$$f_s(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (231)$$

Оно справедливо только для $t > 0$ и равно нулю при $t < 0$.

Сигнал $h(t)$ на выходе идеализированного фильтра (рис. 69) получится, если взять в качестве верхнего предела интегрирования частоту ω_1 и ввести время фазового запаздывания t_1

$$h(t) = \frac{2E}{\pi} \int_0^{\omega_1} \frac{\sin \omega (t - t_1)}{\omega} d\omega \text{ только для } t > 0. \quad (232)$$

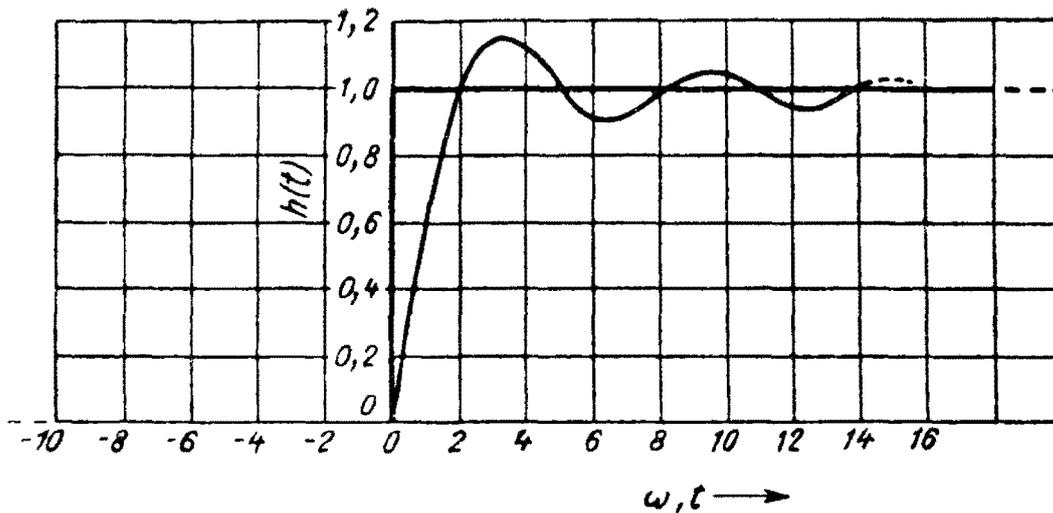


Рис. 74. Реакция фильтра с идеализированной прямоугольной характеристикой на скачок, вычисленная по уравнению (232).

Это выражение аналогично (230), за исключением того что его значение равно нулю при $t \leq 0$.

График сигнала $h(t)$, построенный по уравнению (232) изображен на рис. 74. Если ширина полосы ω_1 стремится к бесконечности, величина сигнала при $t \leq 0$ остается равной нулю.

Такая форма сигнала, следовательно, ближе к реальной и идентична с сигналом на выходе фильтра типа K , нагруженного на волновое сопротивление, при подаче на его вход скачка напряжения. Хотя при этом фильтр должен состоять из бесконечно большого числа звеньев, он все же ближе к реальной схеме.

48. Реакция идеализированного фильтра на короткие импульсы

По графикам сигналов, создаваемых в идеализированных фильтрах скачком, можно определить, пользуясь принципом суперпозиции, форму выходного сигнала при подаче на вход прямоугольных импульсов различной длительности. Так, реакция на прямоугольный импульс длительностью T_1 определяется добавлением к сигналу $h(t)$, вызванному скачком, такого же сигнала, но с обратным знаком, т. е. $-h(t)$, сдвинутого во времени на T_1 .

В § 42 было показано, что с уменьшением длительности импульса T_1 , начиная с некоторого значения, форма выходного сигнала мало изменяется, а в пределе при $T_1 \rightarrow 0$ она будет равна производной скачкообразной кривой.

В § 42 понятие о длительности импульса устанавливалось из сравнения этой длительности с постоянной времени цепи, на которую он воздействует. Но к идеализированному фильтру термин „постоянная времени“ неприменим, и о длительности импульса нужно судить по его спектру. Если длительность импульса такова, что его спектр однороден в пределах полосы идеализированной характеристики, можно считать, что она бесконечно мала. Нет особенного смысла выводить выражения для сигналов на выходе идеализированного фильтра при возбуждении его прямоугольными импульсами различной конечной длительности, так как всегда имеется известная неопределенность самой формы кривой нарастания такого сигнала и величины выбросов, от которых зависит форма сигналов на выходе. Наибольший теоретический интерес представляет определение формы сигнала, вызываемого импульсом бесконечно малой длительности, так как такой импульс характеризует разрешающую способность канала с данной шириной полосы пропускания. Так как амплитуда спектра бесконечно малой длительности постоянна на всех частотах, то энергия, передаваемая каждой составляющей сигнала, будет одинакова. Уравнение (216) определяет однородный частотный спектр такого импульса I . Если он будет приложен к фильтру с идеализированной прямоугольной характеристикой (кривая I на рис. 71, *a*), то составляющие спектра вне полосы $\pm \omega_1$ будут равны нулю. Сигнал на выходе идеализированного фильтра, создаваемый импульсом бесконечно малой длительности, будет равен

$$|Z(0)| \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} \cos \omega t d\omega, \quad (233)$$

что пропорционально

$$\frac{\sin \omega_1 t}{t}. \quad (234)$$

Величина этого сигнала будет бесконечно малой, а форма его определяется уравнением (234). Эта функция получается в результате преобразования Фурье для прямоугольной характеристики. Она представлена на рис. 29, где можно также видеть форму сигнала в цепи с идеализированными характеристиками в форме трапеции, треугольника и др., так как эти сигналы также будут определяться преобразованием Фурье для соответствующей характеристики. Интересно отметить, что форма сигнала (рис. 29, б) на выходе фильтра мало изменяется с изменением формы характеристик (рис. 29, а) Следует также обратить внимание на влияние крутизны характеристики, острых углов и т. п. на форму сигнала. Так, сигнал в фильтре с прямоугольной характеристикой имеет наибольший выброс, тогда как в случае квадратично-косинусной или треугольной характеристики выброс совсем не значителен.

Необходимо помнить, что сигналы, создаваемые очень короткими импульсами, были получены, как производные от соответствующих прямоугольных колебаний, поэтому разница в идеализированных характеристиках может быть оценена по реакции на прямоугольные сигналы. При этом можно установить, какие факторы и в какой мере влияют на искажение сигналов определенной формы и применить сделанные выводы к реальным цепям. Это помогает в оценке влияния различных составляющих спектра на действительную форму сигнала, что имеет особенно важное значение, например, при формировании телевизионного сигнала (для коррекции искажений, связанных с конечными размерами элемента изображения и пр.).

49. Влияние хвостов частотных характеристик

Рассмотренные до сих пор идеализированные характеристики занимали ограниченный участок по оси частот. Это условие не соблюдается для характеристик реальных цепей, имеющих длинные хвосты. Влияние такой формы характеристик сказывается в уменьшении выбросов выходного сигнала и более пологой форме кривой нарастания его. Характеристика треугольной формы (рис. 71) это хорошо иллюстрирует, хотя она и не простирается за пределы $2\omega_1$. На рис. 75, а приведены в качестве примера характеристики двух идеали-

зированных фильтров с хвостами, простирающимися в бесконечность, а на рис. 75,б — формы сигналов, создаваемых в этих фильтрах скачком.

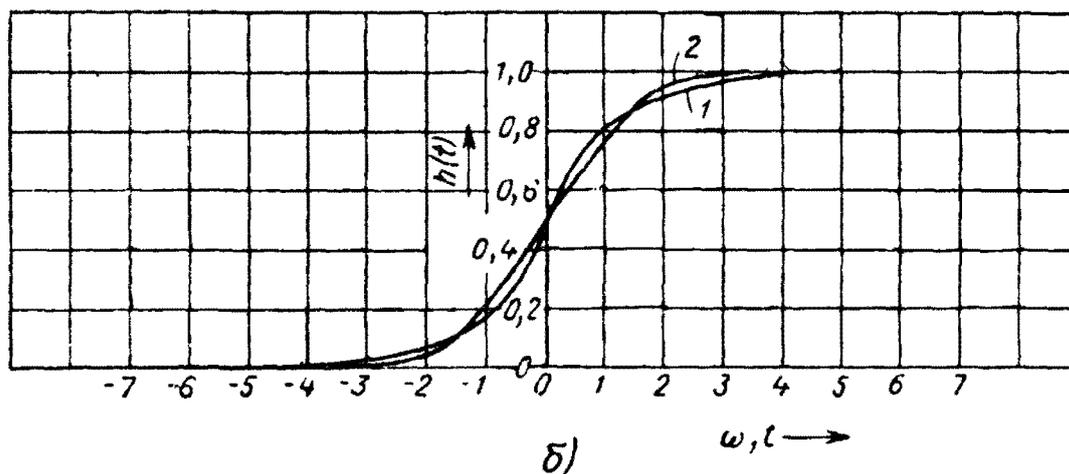
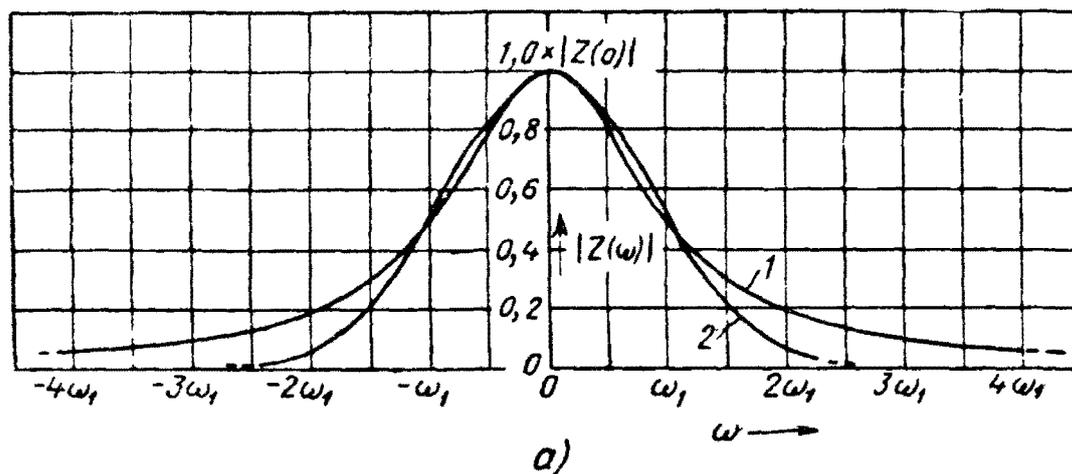


Рис. 75. Реакция фильтров с идеализированными характеристиками, имеющими „хвосты“:

а) идеализированные [характеристики с хвостами. Уравнение кривой 1 — $|Z(\omega)| = \frac{|Z(0)|}{1 + (\frac{\omega}{\omega_1})^2}$, кривой 2 — $|Z_2(\omega)| = |Z(0)| e^{-(\omega/k\omega_1)^2}$ (вероятностная кривая); б) формы сигналов, создаваемых скачком.

Кривая 1 описывается уравнением

$$|Z(\omega)| = |Z(0)| \cdot \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_1})^2}, \quad (235)$$

а кривая 2

$$|Z(\omega)| = |Z(0)| e^{-(\omega/k\omega_1)^2}. \quad (236)$$

где $k=1,195$, так что ω_1 является частотой в точке половинной амплитуды.

Первая из них имеет форму действительной части характеристики нагруженного настроенного контура [см. уравнение (197) в § 36] и интеграл Фурье, определяющий форму выходного сигнала, создаваемого импульсом, может быть легко вычислен. Выходной сигнал будет иметь форму экспоненциального импульса

$$u(t) = \begin{cases} e^{-\omega_1 t} & \text{при } t > 0 \\ e^{\omega_1 t} & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Формы сигналов $h(t)$, создаваемых скачком (рис. 75), определяются интегралом от сигнала, создаваемого импульсами.

Вторая характеристика является „вероятностной“ кривой и интеграл Фурье дает ту же кривую (конформное преобразование Фурье), определяющую форму сигнала, создаваемого импульсом бесконечно малой длительности

$$u(t) \doteq e^{-(\pi k \omega_1 t)^2} \text{ (для положительных и отрицательных значений } t\text{).}$$

Интеграл от этого выражения определяет форму сигнала $h(t)$, создаваемого скачком в идеализированном фильтре с такой характеристикой

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\pi k \omega_1 t)^2} dt. \quad (237)$$

Установившееся значение $h(t)$ для больших t принято на рисунке равным единице. Значения этого интеграла могут быть найдены в таблицах. Им соответствует кривая 2 на рис. 75, б. Обе кривые $h(t)$ на рис. 75, б простираются до бесконечности в сторону положительных и отрицательных значений времени, плавно нарастают, слегка отличаясь по форме, и обладают симметрией 2-го рода относительно $t=0$.

По принципу суперпозиции можно складывать различные идеализированные характеристики для получения идеализированных характеристик сложных фильтров, так что форма сигналов на выходе таких фильтров может быть определена суммированием отдельных выходных сигналов с приведением к одному масштабу по осям времени и частоты.

50. Формирование сигнала элемента телевизионного изображения

Суммируя полученные результаты, можно сказать, что сигнал на выходе идеализированного фильтра с ограниченной полосой пропускания имеет выбросы, величина которых увеличивается с возрастанием крутизны характеристики, тогда как сигнал на выходе фильтра с хвостами, простирающимися в бесконечность, нарастает плавно и не имеет выбросов. Можно было бы получить все виды промежуточных сигналов путем сложения идеализированных характеристик в различных комбинациях, однако это принесло бы немного пользы. Идеализированные фильтры дают возможность составить лишь приближенное представление о форме сигналов в реальных фильтрах, в которых фазовые искажения неотделимы от амплитудных искажений, о чем всегда следует помнить.

Однако одна форма промежуточного выходного сигнала представляет специальный интерес. Это форма сигнала на выходе идеализированного фильтра с квадратично-косинусной характеристикой. Такая частотная характеристика, изображенная на рис. 76, *a*, имеет форму одного полного периода косинусоиды:

$$|Z(\omega)| = \frac{1}{2} |Z(0)| \left(1 + \cos \frac{\pi\omega}{2\omega_1} \right) \quad (238)$$

в полосе частот $\omega = \pm 2\omega_1$. Хотя характеристика имеет конечную ширину (полоса пропускания между точками половинной амплитуды равна $\pm \omega_1$), выходной сигнал в фильтре с такой характеристикой имеет очень незначительные выбросы. Уравнение характеристики достаточно простое и позволяет легко вычислить интеграл Фурье.

В таком фильтре под действием импульса тока I бесконечно малой длительности с однородным спектром косинусоидальных составляющих получается импульс напряжения

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{-\omega_1}^{+\omega_1} |Z(0)| \left(1 + \cos \frac{\pi\omega}{2\omega_1} \right) \cos \omega t d\omega. \quad (239)$$

Это интеграл Фурье от уравнения характеристики фильтра и его решение дает

$$u(t) \doteq \frac{\sin 2\omega_1 t}{(1 - 4\omega_1^2 t^2/\pi^2) t}. \quad (240)$$

Импульс представлен на рис. 76, б вместе с сигналом $h(t)$, создаваемым скачком тока, найденным методом графического интегрирования. Из рисунка видно, что сигнал, создаваемый импульсом, имеет конечную длительность $t = 2\pi/\omega_1$, а сигнал, создаваемый скачком тока, нарастает за это время до уста-

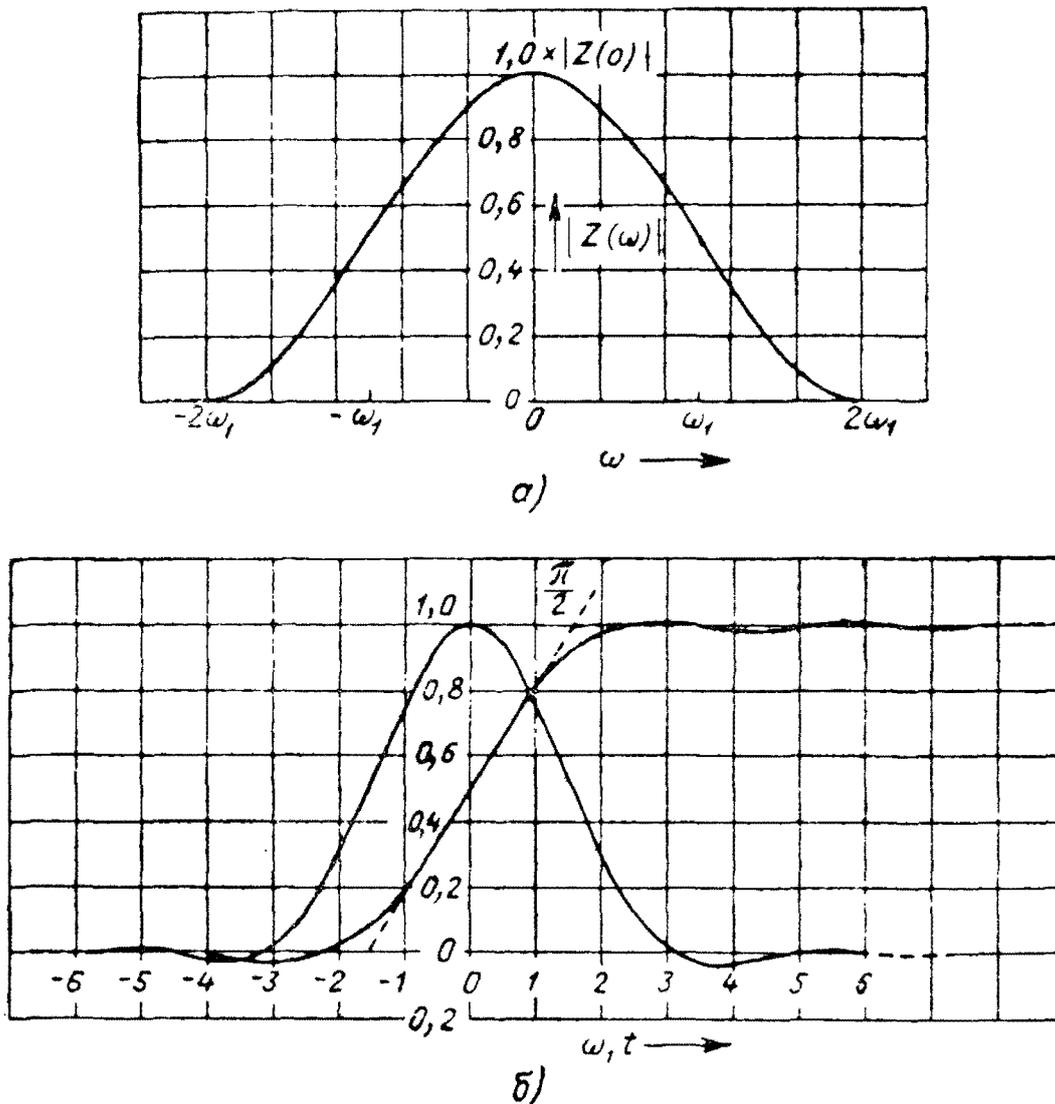


Рис. 76. Квадратично-косинусная характеристика:
 а) диаграмма квадратично-косинусной характеристики; б) реакция цепи с квадратично-косинусной характеристикой на бесконечно узкий импульс и скачок.

новившегося значения. Хотя форма сигналов получена в результате идеализации, она достаточно точно отражает физику явлений. Принцип идеализации интересен тем, что дает возможность вычислить форму сигнала на выходе фильтра с конечной шириной полосы, характеристика которого описывается простым алгебраическим выражением.

Представленные на рис. 76, б сигналы физически нереальны, так как они имеют конечную амплитуду до $t = 0$, тем

не менее, они очень хорошо подходят для телевидения, телеграфии и других систем, в которых каналы должны иметь определенную полосу конечной ширины во избежание взаимных помех соседних каналов. В телевидении ставится задача получения на выходе канала сигналов, нарастающих в течение возможно короткого времени и с небольшими выбросами, при конечной ширине канала с возможно большей точностью воспроизведения формы входного сигнала*. Характеристика, представленная на рис. 76, *a*, хотя и не совсем реальна, так как не учитывает фазовых искажений, довольно точно отражает наилучшее для этой цели распределение энергии спектра в выходном сигнале.

Можно подойти с другой стороны к решению задачи. Предположим, что нужно передать по каналу с конечной полосой телевизионное изображение, элемент которого можно рассматривать как прямоугольный импульс длительностью T_1 . Можно поставить задачу о необходимой ширине полосы канала для пропускания этих сигналов, если характеристика канала имеет идеальную прямоугольную форму, представленную на рис. 69. На рис. 77 показан прямоугольный импульс элемента изображения *a*) и его частотный спектр *б*), а также „эквивалентный“ импульс, полученный с квадратично-косинусной характеристикой и его спектр. Как видно, спектр „эквивалентного“ импульса в полосе $\omega = \pm 2\pi/T_1$ почти такой же, как и спектр прямоугольного импульса. Следовательно, элемент телевизионного изображения будет иметь почти совершенно одинаковую форму как на выходе канала с идеализированной прямоугольной характеристикой конечной ширины, так и на выходе канала с квадратично-косинусной характеристикой той же ширины (по точкам половинного значения). Такая форма сигнала является едва ли не наилучшей, которая может быть получена в канале с конечной шириной полосы пропускания.

Это позволяет вывести простое правило для определения ширины полосы, необходимой для пропускания импульса заданной длительности, которое может быть применено как к полосовому фильтру, так и к фильтру нижних частот, если произвести приведение частоты. Кривые на рис. 77, *б* вычерчены в сопряженной форме.

* Иногда в телевизионных передачах специально вводят небольшие выбросы на сигнале, вызывающие искажения под названием „пластики“. Это делается с целью достижения определенных художественных эффектов, а также для коррекции формы светящегося пятна электронно-лучевой трубки. Однако, это не имеет специального отношения к теории искажения формы сигнала.

В телевидении принято для получения предельно малого элемента применять изображение, состоящее из черных и белых квадратов одинаковых размеров, расположенных в шахматном порядке. В этом случае сигнал будет состоять из колебаний прямоугольной формы с периодом $2T_1$. Следует

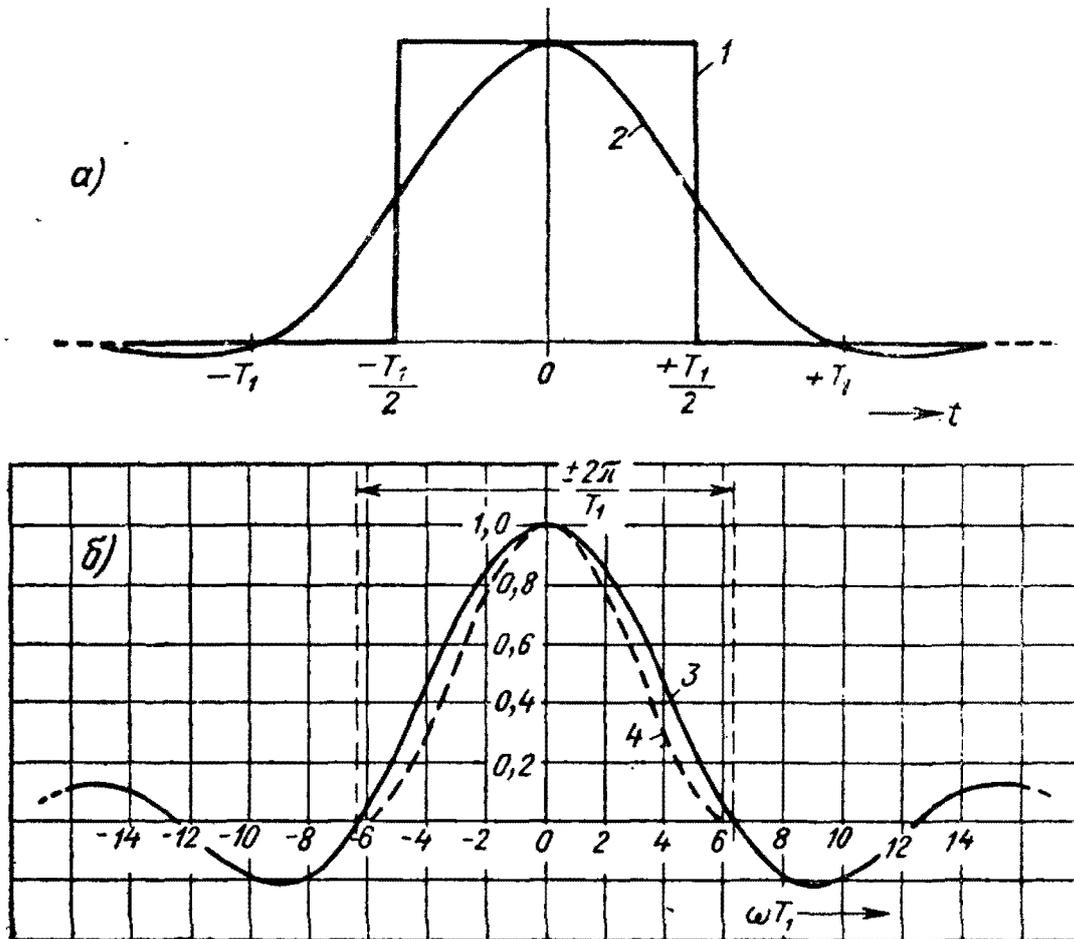


Рис. 77. Влияние конечной полосы пропускания на форму прямоугольного «элемента телевизионного изображения»:

а) прямоугольный импульс; б) частотный спектр.
 1—прямоугольный импульс — «элемент телевизионного изображения»; 2—импульс, искаженный в результате ограничения полосы пропускания до $\pm 2\pi/T_1$, 3 — спектр «элемента телевизионного изображения»; 4 — спектр прямоугольного импульса на выходе цепи с квадратично-косинусной характеристикой.

отметить, что при выбранной полосе будет пропускаться только основная гармоника этого сигнала и он будет воспроизведен, как незатухающие синусоидальные колебания с периодом $2T_1$. В случае одиночного элемента изображения (рис. 77, а) воспроизводимый сигнал будет близок к косинусоидальному импульсу. Таким образом, соображения о наиболее подходящей ширине полосы для передачи одиночного импульса или непрерывного сигнала существенно не расходятся.

Сравнение спектров различных симметричных импульсов (рис. 29, б) показывает, что в первом приближении можно считать форму их „главных лепестков“ одинаковой. Под „главным лепестком“ понимается часть спектра, заключенная между нулевой частотой и первой точкой пересечения огибающей спектра с осью частоты. На основании этого можно сказать, что выводы, сделанные относительно искажений прямоугольного импульса, вызванных ограниченной шириной полосы пропускания, применимы к другим импульсам симметричной формы и их можно даже распространить на импульсные сигналы конечной длительности любой формы. Если такие сигналы будут поданы на фильтр, пропускающий только главный лепесток спектра или только часть его, то на выходе его все они будут иметь одинаковую форму, близкую к „квадратично-косинусному импульсу“*.

В тех случаях, когда полоса передаваемого импульса или элементарного сигнала ограничивается реальным фильтром, появляются существенные фазовые искажения, в результате чего сигнал смещается во времени, и ток в выходном сигнале до момента появления входного (полученный теоретически в результате идеализации) не будет иметь места. Однако практически можно получить выходной сигнал, близкий по форме к квадратично-косинусному импульсу и хорошо согласующийся с идеализированными характеристиками. Например, в схеме усилителя, приведенной на рис. 78, а, часто применяется для формирования телевизионного сигнала, простое П-образное звено фильтра типа K , питаемое анодным током тетрода, так же, как его цепь-двойник, состоящая из Т-образного звена, питаемого напряжением усилителя на триоде (см. § 28, глава III). Сигнал $h(t)$, получаемый на выходе этой схемы при подаче напряжения на сетку лампы, изображается кривой I на рис. 78, б. Предположим, что фильтр имеет частоту отсечки $\omega CR = 0,86$, при которой амплитудная характеристика спадает до половинной величины, и что эта частота является границей главного лепестка спектра прямоугольного сигнала длительностью T_1 . На рис. 77, б показана огибающая спектра. Его главный лепесток занимает полосу частот $\omega = 2\pi/T_1$ и длительность сигнала должна быть равна

$$T_1 = 2\pi RC / 0,86 = 7,3 RC.$$

Сигнал, создаваемый на выходе фильтра элементом изображения такой длительности, представлен на рис. 78, б

* „Квадратично-косинусным импульсом“ в дальнейшем будет именоваться импульс, полученный при прохождении через цепь с квадратично-косинусной характеристикой.

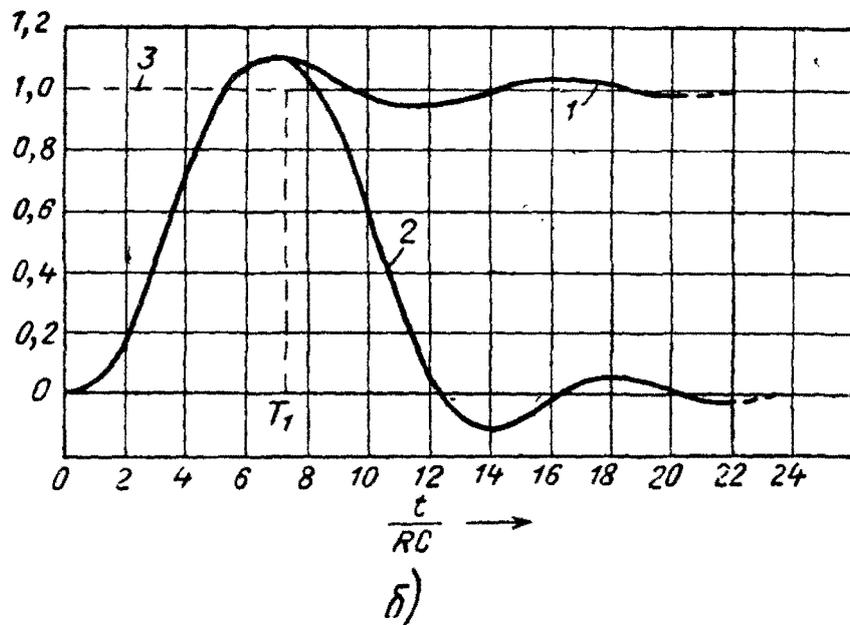
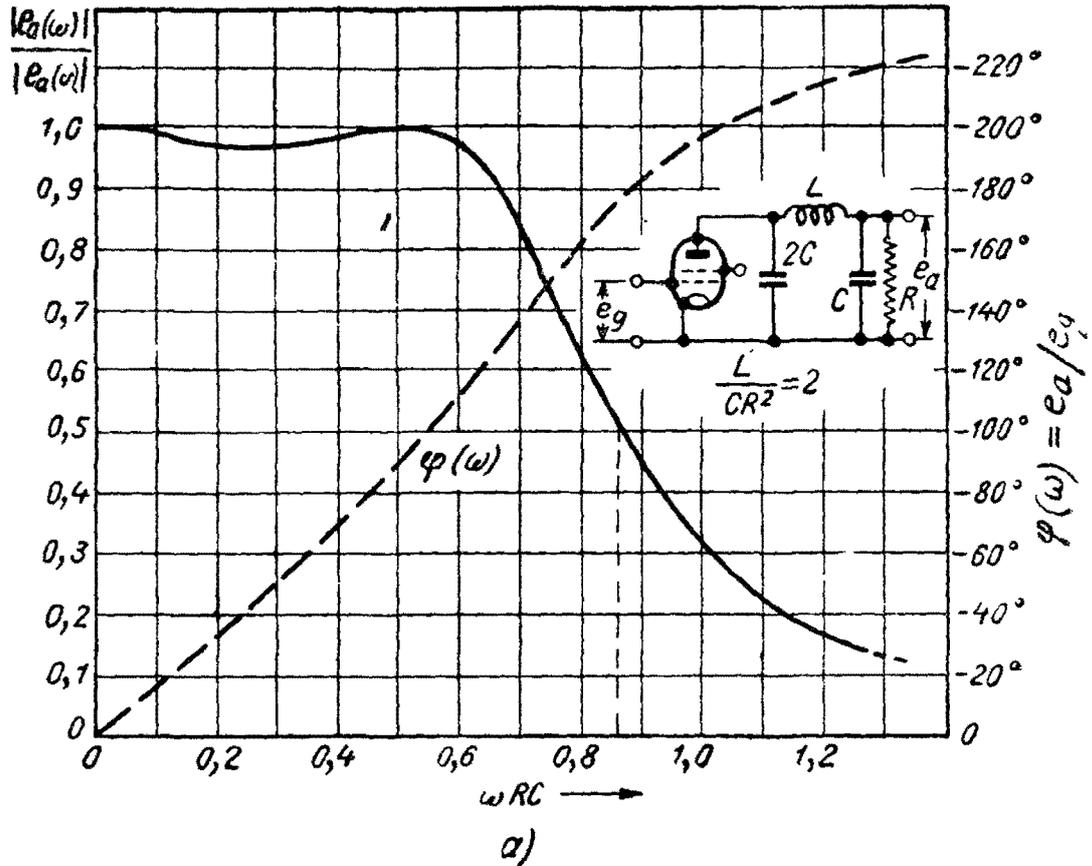


Рис. 78. Реальная характеристика фильтра, близкая к квадратично-косинусной по форме выходного сигнала:
 а) частотные характеристики тетродного телевизионного видеосуилителя с нагрузкой в виде одного звена фильтра типа K ; б) форма выходного сигнала; 1—реакция на скачок, 2—реакция на „элемент изображения“, 3— „элемент изображения“.

(кривая 2). форма сигнала получена путем сложения первого выходного сигнала $h(t)$ и сигнала $-h(t - T_1)$. Сравнение этого сигнала с идеализированным квадратично-косинусным импульсом (рис. 77,а) дает представление об ошибке, которая будет сделана, если взять идеализированный фильтр с полосой, равной $\omega = 0,86/CR$ и не прибегать к решению дифференциального уравнения для точного определения формы сигнала на выходе цепи. Из рисунка видно, что влияние фазовой характеристики сказывается: а) в запаздывании импульса и б) в отсутствии выброса на переднем фронте и увеличении его на заднем фронте, иными словами в появлении асимметрии, неизбежной в реальных цепях. Это было уже рассмотрено в § 39 (рис. 60). Необходимо напомнить, что во всех приведенных случаях рассматривалась огибающая сигнала, т. е. сигнал представлялся таким, каким он был бы на выходе фильтра нижних частот. Однако его можно рассматривать и как огибающую высокочастотных сигналов с несущей частотой ω_0 , если изобразить характеристики цепи симметрично относительно ω_0 в сопряженной форме.

51. Реакция на импульс помехи цепи, расстроенной относительно этого импульса

До сих пор была рассмотрена реакция фильтра нижних частот на огибающую сигнала и реакция эквивалентного полосового фильтра на модулированные высокочастотные колебания с несущей, настроенной на среднюю частоту фильтра. Идеализированные характеристики могут быть также использованы для определения сигнала помехи, возникающего в канале при воздействии на него импульса со спектром, смещенным относительно полосы пропускания канала.

Форма выходного сигнала помехи зависит от его спектра и от частотных характеристик канала. Вполне очевидно, что практически может иметь место всевозможная помеха и может оказаться, что канал будет настроен как на максимум энергии ее спектра, так и на минимум или любое промежуточное значение. В этом случае также достаточно рассмотреть только помеху от элементарного сигнала, например, скачкообразного сигнала или импульса очень малой длительности и затем вычислить действие любого сигнала помехи, пользуясь принципом суперпозиции. Однако применение принципа суперпозиции не всегда требуется, так как можно получить достаточное представление о действии помехи из рассмотрения элементарного мешающего сигнала с использованием идеализированных частотных характеристик.

Простейшей формой идеализированной характеристики является прямоугольная. На рис. 79, а показана такая характеристика со средней частотой ω_0 , захватывающая часть спектра модулированной помехи с несущей частотой ω_c ; приведенный на рисунке спектр имеет экспоненциальную огибающую (модуляция скачком), однако, если разность частот $(\omega_0 - \omega_c)$ достаточно велика по сравнению с шириной полосы фильтра, то попадающую в фильтр часть спектра можно считать равномерной. Это допущение будет вполне точным, если сигнал помехи имеет форму импульса малой длительности.

Суммирование всех составляющих непрерывного сигнала в полосе идеализированного фильтра дает результирующий мешающий сигнал, пропорциональный

$$|Z(0)| \int_{\omega_0 - \omega_1}^{\omega_0 + \omega_1} \cos \omega t d\omega$$

или

$$|Z(0)| \frac{\sin \omega_1 t}{t} \cos \omega_0 t. \quad (241)$$

Абсолютная величина этого сигнала, конечно, зависит от величины элементарного сигнала помехи. Форма сигнала помехи показана на рис. 79, б. Это модулированные колебания с несущей частотой ω_0 , равной средней частоте фильтра, но отнюдь не несущей мешающего сигнала. Огибающая этих колебаний изменяется по закону $\sin \omega_1 t / t$ и зависит только от формы характеристики фильтра. Она не зависит от формы сигнала помехи при условии, что крутизна его фронта велика и энергия равномерно распределена в полосе фильтра.

Уравнение (241) можно переписать несколько иначе

$$|Z(0)| \omega_1 \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \cos \omega_0 t. \quad (242)$$

Так как при $t=0$ $\sin \omega_1 t / \omega_1 t = 1$, максимальное значение сигнала помехи пропорционально $|Z(0)| \omega_1$, т. е. площади, ограниченной характеристикой фильтра, что понятно, если вспомнить, что максимальное значение сигнала помехи при $t=0$ соответствует моменту совпадения по фазе всех косинусоидальных составляющих непрерывного спектра, пропускаемых фильтром. При прямоугольной форме идеализированной характеристики фильтра эти составляющие равны по амплитуде (что, однако, неверно для фильтров с другими харак-

теристиками). Следует также иметь в виду, что максимальное значение сигнала помехи практически будет несколько меньше, чем вычисленное, как так при расчете не учитывалось влияние фазовой характеристики, существенно изменяющей поведение

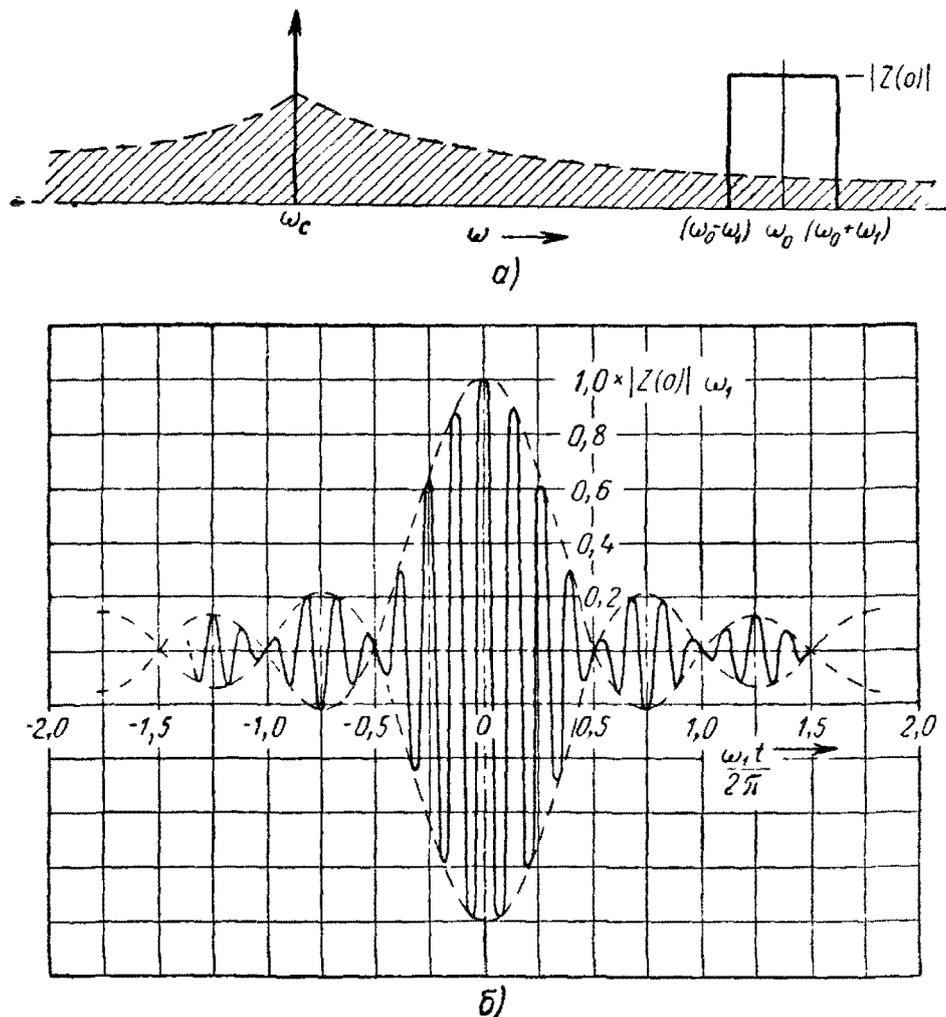


Рис. 79. Реакция идеализированного полосового фильтра на сигнал помехи, спектр которого смещен по оси частот относительно полосы пропускания фильтра:
 а) спектр сигнала помехи и характеристика фильтра; б) форма выходного сигнала.

фильтра. Влияние нелинейности фазовой характеристики скажется в том, что составляющие сигнала помехи не будут совпадать по фазе в момент $t=0$, вследствие чего максимальное значение сигнала уменьшится и в форме его появится асимметрия.

Если ограничиться рассмотрением только идеализированных характеристик фильтра и не учитывать влияние нелинейности фазовой характеристики, то форма импульса помехи при однородном распределении энергии спектра в полосе фильтра легко может быть определена. Спектр его будет идентичен

с идеализированной характеристикой $|Z(\omega)|$, независимо от того, будет ли эта характеристика прямоугольной, трапециoidalной, треугольной, квадратично-косинусной или любой другой формы. Если идеализированные характеристики симметричны относительно средней частоты ω_0 , результирующий сигнал помехи будет представлять модулированные по амплитуде колебания с несущей частотой ω_0 , с огибающей, спектр которой имеет форму $|Z(\omega)|$. Огибающая имеет одинаковую форму, независимо от абсолютной величины несущей частоты ω_0 вплоть до нуля, что соответствует характеристике фильтра нижних частот.

Максимальное значение результирующего сигнала помехи в момент $t=0$ определяется суммой амплитуд всех составляющих, пропускаемых идеализированным фильтром, и пропорционально

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Z(\omega)| d\omega, \quad (243)$$

т. е. площади характеристики.

Если несущая частота сигнала помехи совпадает с граничной частотой полосы канала, метод расчета, основанный на применении идеализированных характеристик, дает значительно менее точные результаты. В таких случаях энергия спектра не будет равномерно распределяться в полосе канала. Форма спектра приобретает асимметрию, зависящую от формы и относительной расстройки сигнала помехи.

ГЛАВА VI

ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОКАСКАДНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

52. Суммарная частотная характеристика многокаскадного усилителя

В предшествующей главе были рассмотрены идеализированные характеристики систем и в качестве практического примера, однокаскадный усилитель (рис. 78), амплитудная характеристика которого приближается по форме к квадратично-косинусной. Однако, как правило, например, в телевизионных и радиолокационных приемниках, где требуется большое усиление, применяется не один, а несколько усилительных каскадов. Поэтому необходимо выяснить связь между характеристиками одно- и многокаскадных усилителей.

Усилительные лампы можно разделить на два класса: лампы, которые можно рассматривать как генераторы напряжения, и лампы, ведущие себя как генераторы тока. Так, триод можно считать генератором напряжения с внутренним сопротивлением R_a и электродвижущей силой в μ раз больше приложенного к его сетке напряжения e_g (μ — коэффициент усиления лампы).

Тетроды, пентоды и другие аналогичные им типы можно рассматривать как генераторы тока в том смысле, что ток (в миллиамперах), текущий по анодной нагрузке, равен произведению приложенного к управляющей сетке напряжения e_g на крутизну характеристики S и не зависит от напряжения на аноде. В обоих случаях вводится определенная идеализация, так как все электронные лампы обладают некоторой нелинейностью и величины μ и S не постоянны. Однако нелинейность ламп не будет учитываться, так как в основном будут рассматриваться только небольшие сеточные напряжения.

Лампы, относящиеся к этим двум типам, могут заменить генераторы тока и напряжения в схемах рис. 1, рис. 3 и других,

причем их можно рассматривать как „генераторы-двойники“ (см. § 28). Эквивалентные схемы каскадов-двойников представлены на рис. 80, *а*, где Z — сопротивление нагрузки.

В дальнейшем будут рассматриваться, главным образом схемы на тетродах или пентодах, так как именно эти лампы применяются преимущественно в многокаскадных усилителях. На рис. 51 был приведен типичный многокаскадный усилитель и кривые сигналов на выходе 1-, 2-, 4- и 8-каскадного усилителя, получающихся при подаче на сетку первой лампы скачка напряжения E . При определении формы сигналов было принято, что цепь связи R_1C_1 между каскадами имеет постоянную времени, равную бесконечности и, следовательно, не вносит никаких искажений. Считалось также, что цепи экранных сеток имеют хорошую развязку, поэтому все искажения сигнала являются высокочастотными искажениями и обусловлены только характеристиками анодной нагрузки L, C и r . Эти искажения при возрастании числа усилительных каскадов N проявляются в увеличении времени нарастания сигнала, кривизны нижней части характеристики и выбросов. Время кажущегося запаздывания сигнала можно при этом не учитывать. Термин „кажущееся запаздывание“ применен здесь потому, что в цепи с сосредоточенными постоянными действительного запаздывания нет, но вследствие того, что выходной сигнал остается ничтожно малым в течение некоторого времени, возникает эффект, равносильный запаздыванию сигнала.

Целесообразно рассматривать порознь высокочастотные и низкочастотные искажения. Последние обычно появляются вследствие недостаточно большой или неправильно выбранной постоянной времени в цепях междукаскадной связи и развязки. Оба вида искажений оказывают совершенно различное влияние на форму прямоугольных колебаний, как это видно из рис. 80, *б*.

Низкочастотные искажения в основном вызывают наклон горизонтальной части кривой сигнала без изменения времени его нарастания. Это можно устранить или свести до незначительной величины путем правильного выбора постоянной времени цепей развязок. Наличие же высокочастотных искажений в той или иной мере совершенно неизбежно, что вызывает большие трудности при проектировании усилителей, предназначенных для усиления очень коротких импульсов или сигналов с крутым фронтом. Эти трудности возрастают с увеличением числа каскадов. Ввиду этого желательно брать число каскадов в таких усилителях минимальным и добиваться от каждого максимально возможного усиления.

Причины возрастания высокочастотных искажений с увеличением числа N усилительных каскадов становятся ясными из рассмотрения частотных характеристик N -каскадного усилителя, изображенного схематически на рис. 81. Постоянная

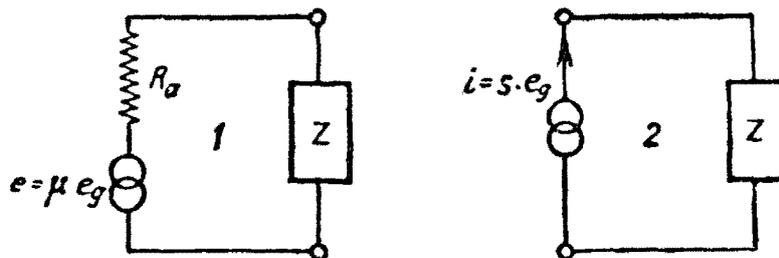


Рис. 80а. Триод и тетрод в качестве генераторов напряжения и тока:
1 — эквивалентная схема триодного усилителя; 2 — эквивалентная схема тетродного усилителя.

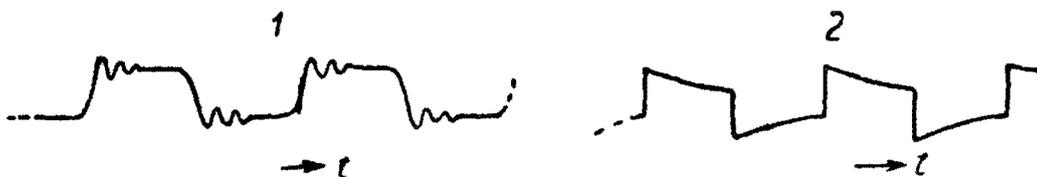


Рис. 80б. Типичные искажения прямоугольных колебаний в усилителе:
1 — высокочастотные искажения, 2 — низкочастотные искажения.

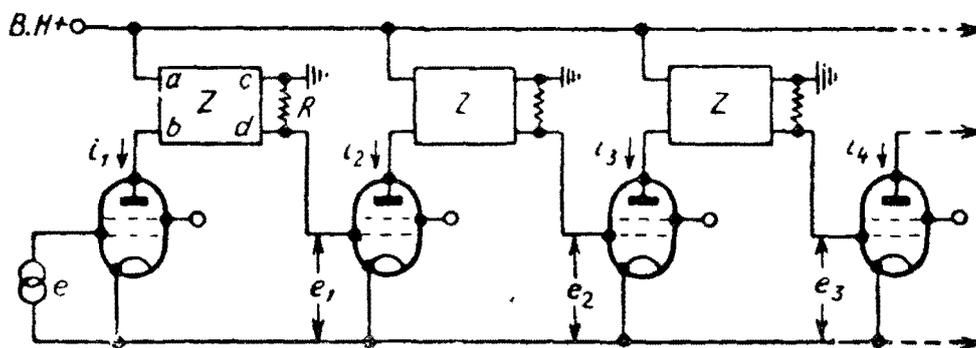


Рис. 81. Схема многокаскадного усилителя.

времени цепей развязки, смещения и утечки сетки принята равной бесконечности, потому эти цепи и не показаны на схеме. Анодная нагрузка Z представлена в виде четырехполюсника. (Она может быть также двухполюсником). В этом случае зажим c совместится с a , а зажим d с b).

Пусть на сетку первой лампы подается напряжение $e_g = E \cos \omega t$. Тогда анодный ток i_1 первой лампы будет

$$i_1 = S e_g = S E \cos \omega t,$$

где $S = di_a/de_g$ — крутизна характеристики лампы. Уравнение выведено для случая, когда внутреннее сопротивление лампы равно бесконечности.

Выходное напряжение e_1 будет равно

$$e_1 = SE |Z(\omega)| \cos [\omega t - \varphi(\omega)], \quad (244)$$

где $|Z(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ — модуль и фаза сопротивления анодной нагрузки. Напряжение e_1 подается на сетку второй лампы, в анодной цепи которой потечет ток i_2 , равный

$$i_2 = Se_1 = S^2 E |Z(\omega)| \cos [\omega t - \varphi(\omega)].$$

На выходе второй лампы ток создаст напряжение

$$e_2 = S^2 E |Z(\omega)|^2 \cos [\omega t - 2\varphi(\omega)], \quad (245)$$

которое подается на сетку следующей лампы и т. д.

Напряжение e_N на выходе N каскадов будет

$$e_N = S^N E |Z(\omega)|^N \cos [\omega t - N\varphi(\omega)]. \quad (246)$$

Из сравнения этого напряжения с входным напряжением сигнала $e = E \cos \omega t$ следует, что общие частотные характеристики N -каскадного усилителя будут

$$\left. \begin{array}{l} \text{Модуль } |Z(\omega)|^N \\ \text{Фазовый угол } N\varphi(\omega) \end{array} \right\} \quad (247)$$

без учета постоянной величины S^N .

Этот случай является частным случаем цепочки из четырехполюсников, рассмотренной в § 27, в которой отдельные звенья цепочки „односторонни“ и не могут отражать энергию от выходных зажимов обратно к входным. Таким образом, общая амплитудная характеристика изменяется пропорционально N -ой степени, а сдвиг фазы пропорционально N . Рассмотрим в качестве примера характеристики, приведенные на рис. 52. При частоте $\omega = 2,5/rC$ амплитудная характеристика спадает до половины своего значения при $\omega = 0$, а фазовый угол равен 79° . При двух каскадах усиления соответствующие значения будут $1/4$ и 158° , при трех — $1/8$ и 237° и т. д. Амплитудная характеристика становится, следовательно, все уже, крутизна фазовой характеристики и ее нелинейность возрастают, вследствие чего увеличивается фазовый сдвиг $\varphi(\omega)/\omega$ и фазовые искажения.

53. Идеализированные характеристики многокаскадных усилителей

Усилительный каскад с прямоугольной амплитудной характеристикой, изображенной на рис. 69, представляет специальный случай. Сколько бы ни было таких звеньев в многокаскадном усилителе, общая частотная характеристика будет иметь ту же форму, а форма выходного сигнала, создаваемого поданным на вход скачком, будет также неизменной и определится интегральным синусом (см. § 46, рис. 70).

Время нарастания и искажения сигнала в таком идеализированном усилителе не зависят от числа каскадов N .

Практически нельзя получить точно такие характеристики, но можно рассчитать фильтры с характеристиками, достаточно близкими к прямоугольным, и применить их в качестве анодной нагрузки. Суммарные характеристики нескольких каскадов с такими фильтрами будут приближаться к идеализированным, а форма выходного сигнала будет близка к интегральному синусу. Если получающиеся при этом искажения окажутся недопустимыми, можно применить многокаскадный усилитель с прямоугольными характеристиками и с одним каскадом, например, по схеме рис. 78, для коррекции формы сигнала.

В телевизионных приемниках основное усиление обычно получается в усилителе промежуточной частоты с достаточно плоской амплитудной характеристикой, в котором в качестве анодной нагрузки применяется или двухконтурные полосовые фильтры или одиночные, разнесенные по частоте, контуры, в то время, как видеоусилитель, следующий за вторым детектором, используется для формирования сигнала. Преимущество такой системы состоит в том, что она допускает значительный уход несущей частоты или расстройку местного гетеродина без серьезных искажений сигнала, что будет полнее рассмотрено в главе VII.

Если скорость нарастания сигнала должна быть сохранена, несмотря на увеличение числа N усилительных каскадов, ширина полосы любого каскада, характеристика которого отличается от прямоугольной, должна быть расширена так, чтобы общая ширина полосы оставалась постоянной при любом N . Так как характеристика любого реального усилителя имеет на границах полосы пропускания пологие части конечной крутизны, определение ширины полосы пропускания является совершенно условным. В § 46 было показано, как лучше всего определять ширину полосы.

Все же поскольку форма общей характеристики изменяется с изменением N , даже при постоянстве номинальной

полосы пропускания, форма выходного сигнала, создаваемого скачкообразным входным сигналом, будет также изменяться, как было показано на примере рис. 51.

Рассмотрим простейший случай — усилительный каскад с нагрузкой в виде активного сопротивления. Принципиально сигнал на выходе такого усилителя не должен зависеть от частоты, но практически на высоких частотах будет сказываться влияние емкости анод—земля и сетка—земля, а также емкость монтажа. Характеристики такого усилительного каскада уже рассматривались в § 36. Схема его приведена на рис. 54, где показана паразитная емкость C , шунтирующая анодную нагрузку R . Полное сопротивление нагрузки в комплексной форме определяется выражением (197)

$$Z(j\omega) = \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + \omega^2 C^2 R^2}.$$

Модуль и фазовый угол соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} |Z(\omega)| &= \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \\ \varphi(\omega) &= -\operatorname{arctg} \omega CR \end{aligned} \right\} \quad (248)$$

Для усилителя, состоящего из N аналогичных каскадов, согласно (247), общий модуль равен

$$\left. \begin{aligned} &\frac{(SR)^N}{(1 + \omega^2 C^2 R^2)^{N/2}}, \\ \text{а общий сдвиг фазы} \\ &N\varphi(\omega) = -N \operatorname{arctg} \omega CR. \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

Эти характеристики изображены на рис. 82, а для различных значений N таким образом, что ширина полосы между точками половинной амплитуды $|Z(\omega)| = R/\sqrt{2}$ не зависит от числа N . Для этого необходимо, чтобы при добавлении каждого каскада, постоянная времени CR отдельных каскадов уменьшалась, т. е. CR должно являться функцией от N . Пусть ω_1 ширина полосы, так что из (249)

$$\left. \begin{aligned} (1 + \omega_1^2 C^2 R^2)^{N/2} &= \sqrt{2} \\ \text{или} \\ CR &= \omega_1^{-1} \sqrt{2^{1/N} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

На рис. 82,а можно видеть изменение формы суммарной характеристики с увеличением N , при сохранении одной и той

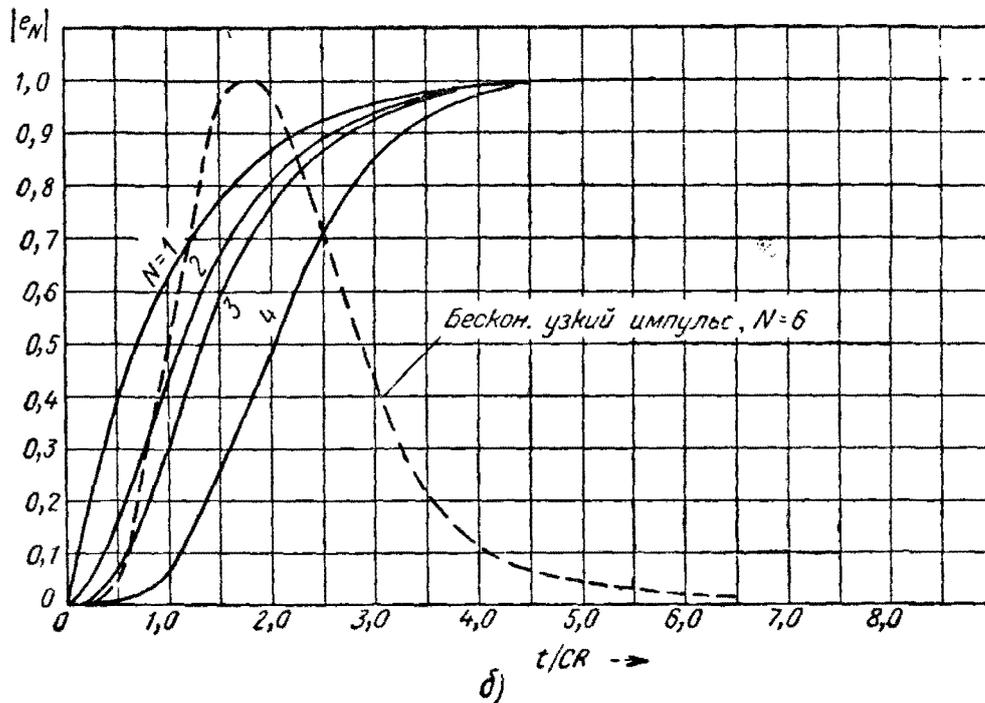
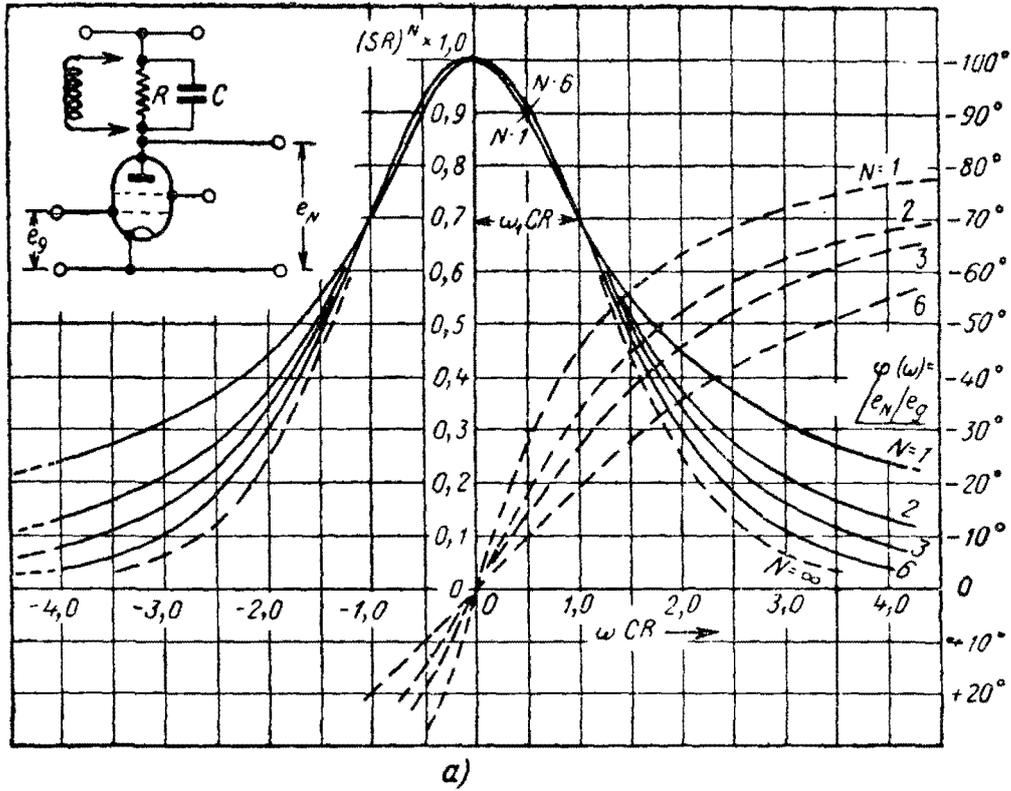


Рис. 82. Характеристики тетродного N -каскадного усилителя с нагрузкой в виде активного сопротивления, шунтированного емкостью:

а) сопряженные характеристики N -каскадного усилителя; $CR = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{2^{1/N} - 1}$,

где ω_1 — полоса частот по точкам со значением $1/\sqrt{2}$; б) реакция на скачок, поданный на первую сетку.

же номинальной ширины полосы ω_1 . График модуля сужается в области малых значений модуля, а фазовая характеристика становится линейнее с ростом ω .

В пределе при $N \rightarrow \infty$ получается идеализированная характеристика, представляющая значительный интерес. Модуль по форме приближается к „вероятностной“ кривой*, представленной пунктирной линией, а фазовая характеристика становится линейной. Эта форма характеристик уже рассматривалась в § 48, хотя и не в связи с реальными схемами. На приведенном примере видно, что практически ее можно получить с достаточным приближением для сравнительно простой усилительной схемы уже при $N=6$.

Вероятностная характеристика определяется выражением (236)

$$|Z(\omega)| = |Z(0)| e^{-(\omega/k\omega_1)^2}.$$

В приведенном примере k должно быть равно 1,7, чтобы $|Z(\omega)|$ уменьшалось до $1/\sqrt{2}$ от максимального значения $|Z(0)|$ на частоте ω_1 .

Сигнал на выходе усилителя, состоящего из N каскадов, от импульса бесконечно малой длительности на сетке первой лампы, может быть вычислен с помощью интеграла Фурье по методу, изложенному в § 43. Уравнение (249) суммарной характеристики можно представить в виде действительной и мнимой частей, воспользовавшись выражением (197)

$$(SR)^N \left(\frac{1 - j\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right)^N = (SR)^N \frac{1}{(1 + j\omega CR)^N}. \quad (251)$$

Интеграл Фурье от функции (251) является табличным и дает выходной сигнал, пропорциональный

$$\left(\frac{t}{CR} \right)^{N-1} e^{-t/CR}, \quad (252)$$

где CR — постоянная времени одного каскада, выбранная согласно выражению (250). Этот сигнал бесконечно мал, но вычертив его график и произведя графическое интегрирование, можно получить форму выходного сигнала при воздействии на сетку первой лампы скачка напряжения (рис. 82, б). Установившееся значение напряжения равно $(SR)^N E$.

Применимость кривых рис. 82, а и б может быть расширена, если воспользоваться теоремой об эквивалентности полосового фильтра и фильтра нижних частот (см. § 33). Частотные характеристики а), вычерченные в сопряженной

* Доказательство это приведено в приложении.

форме (амплитудная характеристика имеет симметрию 1-го рода, а фазовая — 2-го рода относительно нулевой частоты), должны быть приведены к несущей частоте ω_0 при условии, что $\omega_0 \gg \omega_1$.

В этом случае они будут представлять собой характеристики усилителя с нагрузкой в виде колебательного контура, шунтированного активным сопротивлением, настроенного на частоту ω_0 (схема на рис. 82, а). Графики рис. 82, б будут представлять огибающие выходного сигнала.

Графики выходных сигналов, получающихся при воздействии на сетку первого каскада скачка напряжения, слегка отличаются между собой по форме, но все имеют приблизительно одинаковое время нарастания. Первый график, для $N=1$, является знакомой экспоненциальной кривой для каскада с нагрузкой в виде активного сопротивления, шунтированного емкостью; у последующих графиков для большего числа каскадов верхний и нижний загиб становятся более симметричными и сигналы нарастают от нуля до половинной амплитуды в течение большего времени, т. е. с большим кажущимся запаздыванием. В пределе при $N \rightarrow \infty$ выходной сигнал при подаче на вход узкого импульса имеет форму вероятностной кривой, как это уже было показано в § 48. Форма сигнала, создаваемого скачком напряжения, определится интегрированием вероятностной функции и будет иметь вид кривой 2 на рис. 75, б.

Таким образом, рассмотренная схема усилителя обладает тем интересным свойством, что кривая частотной характеристики и выходной сигнал, создаваемые узким импульсом, имеют одинаковую форму. Это является практической иллюстрацией конформного преобразования Фурье, когда функция и интеграл Фурье от этой функции подобны. Хотя такая схема усилителя в чистом виде не может быть осуществлена, так как требует бесконечно большого числа каскадов, тем не менее нельзя сказать, что она физически совершенно невозможна, так как вероятностная кривая характеристики может быть воспроизведена с желаемой степенью точности, если взять достаточно большое число ступеней. Как видно из рис. 82, уже при $N=6$ получается хорошее приближение, достаточное для многих практических целей.

54. Многокаскадные усилители с неизменной формой сигнала на выходе каждого каскада

До сих пор были рассмотрены два предельных типа идеализированных характеристик многокаскадных усилителей, которые могут быть получены с известным приближе-

нием в реальных цепях: 1) прямоугольная характеристика (рис. 71, *a*) и 2) вероятностная характеристика (кривая 2 на рис. 75, *a*). В усилителях с характеристиками первого типа выходной сигнал имеет сравнительно большие выбросы, но форма сигнала и время нарастания не изменяются от каскада к каскаду.

В усилителях с характеристиками второго типа сигнал нарастает асимптотически до установившегося значения (рис. 82, *б*), и так как от каскада к каскаду меняется масштаб оси времени, а не форма сигнала, действительная скорость нарастания сигнала уменьшается с увеличением числа каскадов. Таким образом, для того, чтобы форма сигналов на выходе каждого каскада была действительно одинаковой, масштаб по оси времени с увеличением числа каскадов должен уменьшаться. То, что форма сигнала в усилителе с идеализированной характеристикой может не меняться покаскадно, видно из того, что кривые рис. 82 теоретически могут быть получены при очень большом числе каскадов N (приближающемся к бесконечности); следовательно, они будут такими же и при $N+1$ каскадах. Уменьшение масштаба по оси времени для сохранения идентичной формы сигнала в последующем каскаде должно производиться в постоянном отношении, равном приблизительно 1,5:1. Это так же можно показать на рис. 82, где величина сигнала отложена в функции от t/CR . Кривые имеют приблизительно постоянное время нарастания, при условии, что CR изменяется в зависимости от числа ступеней N по уравнению (250)

$$CR \div \sqrt{2^{1/N} - 1}.$$

На рис. 82 это показано для $N=6$, при котором форма выходного сигнала становится близкой к форме, соответствующей идеализированной вероятностной характеристике.

Таким образом, если CR остается постоянным, то при увеличении числа каскадов N время нарастания сигнала в N -ом каскаде будет в $1/\sqrt{2^{1/N} - 1}$ раз больше, чем в первом каскаде. В каждом последующем каскаде время нарастания сигнала по сравнению с предыдущим увеличится в $1/\sqrt{2^{1/2} - 1}$ или приблизительно в 1,5 раза. Кривые сигналов, не меняющие своей формы с увеличением N , благодаря изменению масштаба по оси времени имеют большое значение в телевизионной технике, причем можно создать другие формы характеристик, занимающие промежуточное значение между двумя рассмотренными предельными типами

и дающие лучшую форму выходного сигнала, например, с меньшим временем нарастания, чем при вероятностной характеристике и с меньшими выбросами, чем при прямоугольной характеристике, причем масштаб по оси времени должен изменяться в отношении промежуточном между 1,5:1 и 1:1.

Этот вопрос был исследован многими авторами, но они рассматривали обычно идеализированные формы кривых выходных сигналов, создаваемых скачкообразным сигналом, а не идеализированные частотные характеристики. Справедливость заключений, сделанных на основе рассмотрения идеализированных частотных характеристик, может иногда вызывать сомнения вследствие того, что не учитывается фазовая характеристика. На это обращалось внимание в предыдущей главе.

Другой подход к решению задачи, состоящий в рассмотрении идеализированных кривых выходного сигнала и определении требующихся частотных характеристик, имеет некоторые преимущества, в частности, для расчета многокаскадных усилителей.

Практически фазовая характеристика играет обычно более важную роль, чем амплитудная. Например, в § 50 было показано, что сигнал на выходе усилительного каскада, собранного по схеме рис. 78, при возбуждении его прямоугольным импульсом определенной длительности, очень близок по форме к сигналу на выходе усилителя с идеализированной квадратично-косинусной характеристикой, хотя амплитудная идеализированная характеристика (рис. 76,а) сильно отличается от реальной.

Характеристики большинства реальных многокаскадных телевизионных усилителей занимают промежуточное значение между этими пограничными типами. Если в одном из каскадов получаются выбросы, они будут возрастать с ростом числа каскадов, а время нарастания сигнала в последующем каскаде увеличится по сравнению с предыдущим в отношении, заключающемся между 1,5:1 и 1:1.

Наилучшая форма сигнала на выходе усилителя при подаче на его вход скачка напряжения, может быть, вероятно, представлена кривой 1 на рис. 83,а, нарастающей равномерно от нуля до установившегося значения в течение любого заданного времени T_1 . Выходной сигнал при подаче на вход такого усилителя прямоугольного импульса бесконечно малой длительности будет иметь форму, определяемую дифференцированием кривой 1, т. е. форму прямоугольника (рис. 83,б). Интеграл Фурье для этого прямоугольного сиг-

нала дает требуемую частотную характеристику усилителя (кривая 1 на рис. 83,в), определяемую уравнением

$$|Z(\omega)| \doteq \frac{\sin \omega T_1}{\omega}. \quad (253)$$

Фазовый угол должен изменяться линейно с частотой. (Точная форма $|Z(\omega)|$ приведена на рис. 29).

Частотные характеристики, требующие бесконечно широкой полосы, не могут быть практически получены, но можно

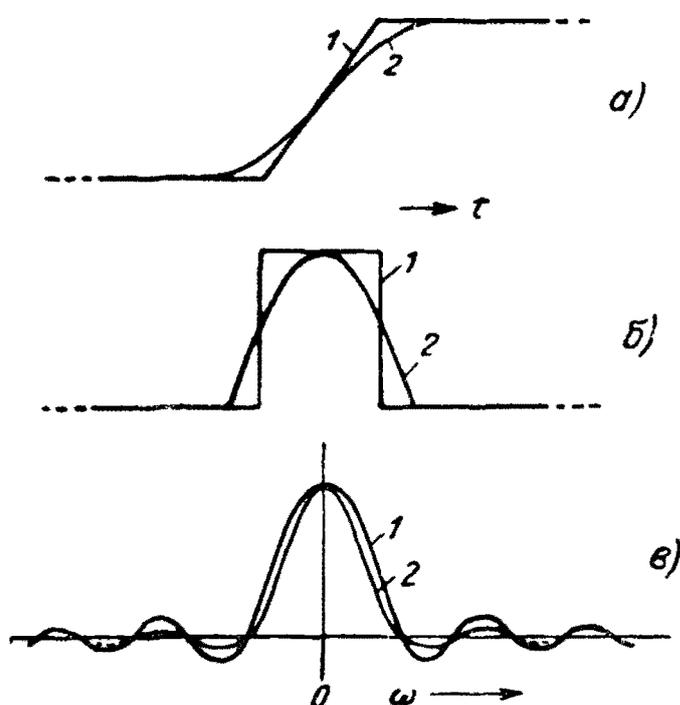


Рис. 83. Идеализированная форма сигналов (кривые 1 и 2) на выходе усилителя:

а) форма сигнала при возбуждении скачком напряжения; б) то же при подаче на вход импульсов; в) требуемые частотные характеристики.

ной сигнал нарастает по синусоидальной кривой (кривая 2, на рис. 83,а). Тогда выходной сигнал в таком усилителе будет представляться косинусоидой (кривая 2 на рис. 83,б), и требуемая частотная характеристика дается интегралом Фурье для косинусоидального импульса (рис. 83,в). Точная форма характеристики также представлена на рис. 29. При этом опять предполагается, что фазовый угол изменяется линейно с частотой. Эта характеристика также занимает бесконечно широкую полосу, но она быстрее приближается к нулю с ростом частоты. Синусоидальная кривая нарастания выходного сигнала, создаваемого скачкообразным входным напряжением, может быть довольно точно получена в реальных усилителях, например, в представленном схема-

показать, что если бы такой гипотетический усилитель был создан, форма сигнала на выходе отдельных его каскадов при возбуждении скачком напряжения, не будет сохраняться постоянной от каскада к каскаду, а появятся закругления острых углов, которые будут увеличиваться по мере возрастания числа каскадов N .

Можно выбрать другую форму кривой выходного сигнала, создаваемого скачком напряжения на входе, которая мало изменяется от каскада к каскаду, и принять, что выход-

тически на рис. 51, в котором в качестве анодной нагрузки взят параллельный контур с большим затуханием, причем добротность контура должна быть несколько ниже, чем в схеме рис. 51, для уменьшения выбросов сигнала. Лучшим значением Q является 0,6, несколько больше, чем соответствующее критическому затуханию ($Q = 0,5$). Такая форма выходного сигнала воспроизводится довольно точно при некотором числе одинаковых усилительных каскадов, причем масштаб оси времени увеличивается от каскада к каскаду в отношении, примерно, 1,4:1.

Следует отметить, что форма выходного сигнала в фильтре с квадратично-косинусной характеристикой (рис. 76,б), при возбуждении скачком напряжения, очень близка к синусоидальной кривой нарастания. Эта кривая оценивалась в § 50 как лучшая идеализированная характеристика для многокаскадного усилителя, так как она дает максимальную скорость нарастания сигнала и минимальные выбросы при конечной ширине полосы пропускания.

Можно, применяя различные комбинации анодных нагрузок и тщательно регулируя параметры цепей, добиться более совершенной формы выходного сигнала в том отношении, что скорость нарастания его будет максимальной, выбросы минимальными, форма сигнала неизменной, а время нарастания будет увеличиваться от каскада к каскаду примерно в отношении 1,4:1. Однако разница между кривой такого сигнала и идеализированной синусоидальной кривой нарастания очень незначительна. В то же время для теоретической оценки поведения усилителя идеализированная кривая оказывается очень полезной, так как форма сигнала в последовательных каскадах остается почти той же самой, а масштаб оси времени также увеличивается в отношении, приблизительно, 1,4:1, которое для удобства может быть принято равным $\sqrt{2}:1$.

Подводя итоги, можно сказать, что имеются три типа идеализированных кривых выходных сигналов, представляющих особый интерес: 1) кривая, форма которой определяется интегральным синусом (рис. 70), соответствующая прямоугольной характеристике (рис. 69). Эта кривая остается неизменной от каскада к каскаду как по форме, так и по времени нарастания; 2) кривая, форма которой определяется „функцией вероятности“ (рис. 75, кривая 2), не имеющая выбросов. Форма этой кривой остается постоянной, но масштаб оси времени увеличивается в отношении 1,5:1 от каскада к каскаду; 3) промежуточная между первыми двумя синусоидальная кривая нарастания сигнала (кривая 2 на

рис. 83,а). Эта кривая имеет почти максимально возможную скорость нарастания и минимальные выбросы и очень незначительно изменяет свою форму от каскада к каскаду, хотя масштаб оси времени увеличивается при этом в отношении приблизительно $\sqrt{2}:1$.

55. Предельные скорости переходных процессов в усилителе

Выбор схемы анодной нагрузки усилительного каскада или каскадов зависит, очевидно, от назначения усилителя. До сих пор рассматривались усилители кратковременных сигналов, и основной целью расчета являлось обеспечение точности воспроизведения формы сигнала. На точность воспроизведения формы сигнала влияет характер анодной нагрузки и число усилительных каскадов. Эти факторы взаимосвязаны, так как усиление каждого каскада зависит от анодной нагрузки. При расчете усилителей часто отсутствует свобода выбора величины полного сопротивления анодной нагрузки (а, следовательно, и усиления на каскад), так как подлежащие усилению сигналы могут иметь очень крутые спады. Поэтому может оказаться недостаточным сохранить неизменными только форму кривых нарастания и спадания сигнала; необходимо, чтобы и масштаб времени оставался, по возможности, неизменным. Например, может потребоваться усилить телевизионные сигналы прямоугольной формы, нарастающие в течение 0,1 мксек от нуля до максимального значения. Предположим, что синусоидальная кривая нарастания сигнала будет признана удовлетворительной (как показано в предыдущем разделе), так как форма сигнала будет воспроизведена довольно точно, если применить цепочку усилительных каскадов с анодной нагрузкой, показанной на схеме рис. 51 (с $Q=0,6$). Однако время нарастания сигнала будет увеличиваться с добавлением каждой ступени и становиться приблизительно равным 0,1, 0,14, 0,2, 0,28 ... мксек, в результате чего телевизионное изображение окажется очень нечетким.

Практически скорость нарастания сигнала уменьшается с добавлением каждого каскада, какая бы анодная нагрузка ни была выбрана, и для того, чтобы добиться лучшего воспроизведения сигнала усилителем с заданным общим усилением, рекомендуется брать минимальное число каскадов, добываясь от каждого каскада максимально возможного усиления в пределах необходимой полосы. Максимальное усиление ступени соответствует наибольшему полному сопро-

тивлению анодной нагрузки. Но так как для правильного воспроизведения формы данного сигнала требуется определенная полоса пропускания, величина полного сопротивления анодной нагрузки будет, в конечном счете, ограничена неизбежной шунтирующей емкостью анода и сетки лампы по отношению к земле.

Например, в видеоусилителе, показанном на рис. 78,а, величина полного сопротивления анодной нагрузки может быть увеличена за счет повышения значений L и R и уменьшения C в одном и том же отношении. При этом масштаб по оси « CR » сохранится, так что ширина полосы пропускания и форма характеристики останутся неизменными, а усиление возрастет. Однако существует предел для этого возрастания, так как величина емкости C не может быть меньше шунтирующей емкости лампы. Практически в большинстве телевизионных приемников анодная нагрузка в усилителях промежуточной частоты и видеоусилителях не содержит никакой дополнительной емкости, кроме емкости лампы. Этим определяется максимальная величина R для любой схемы нагрузки и, следовательно, максимальное усиление ступени при заданной ширине полосы пропускания или наоборот.

На рис. 84,а показаны шунтирующие емкости в схеме усилителя: C_{ak} — емкость анод—катод первой лампы и C_{ck} — емкость сетка—катод следующей лампы, причем в них входят и паразитные емкости. На этой схеме емкости C_{ak} и C_{ck} разделены некоторым четырехполюсником (см. также схемы на рис. 57 и 78,а). В тех случаях, когда анодная нагрузка является двухполюсником (как на рис. 52), эти емкости соединены параллельно (рис. 84,б), так как зажим a четырехполюсника совмещается с зажимом c , а зажим b с d .

Если емкости C_{ak} и C_{ck} разделены некоторой реактивной цепью, так что вся эффективная анодная нагрузка становится четырехполюсником, эта нагрузка может образовать звено или несколько звеньев фильтра.

Фильтр может быть полосовым или фильтром нижних частот. Например, нагрузки в усилителях на рис. 57 и 78,а представляют звенья фильтра нижних частот типа K , а на рис. 87,б — полосовой фильтр.

Такая комбинация усилительных ламп и звеньев фильтра обычно применяется для получения большого и равномерного усиления в широкой полосе частот, требующегося, например, для усиления телевизионных сигналов. При расчете таких усилителей иногда удобно пользоваться обычными расчетными данными для фильтров, и большинство опубликованных работ основано на этом методе.

Однако при этом следует помнить, что расчетные данные фильтров получаются на основе предположения о том, что фильтр имеет бесконечное число звеньев. В случае одного или небольшого числа звеньев, нагруженных сопротивлени-

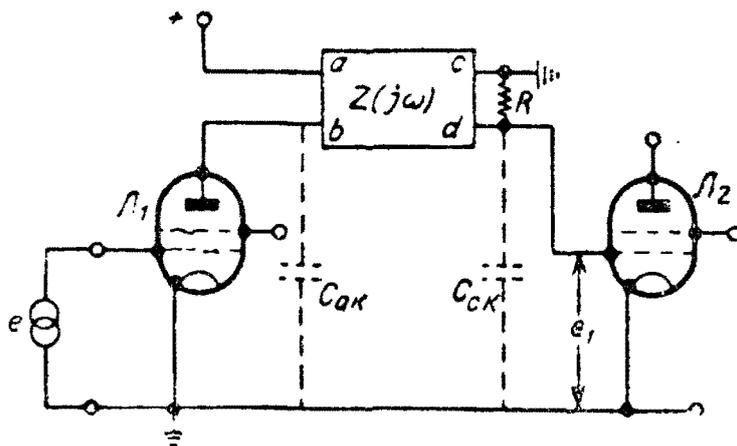


Рис. 84,а. Схема распределения шунтирующих емкостей в усилителе.

ями, как это и бывает в усилителях, характеристики их будут отличаться от теоретических и это отличие может оказаться очень существенным, если речь идет о точном воспроизведении сигнала.

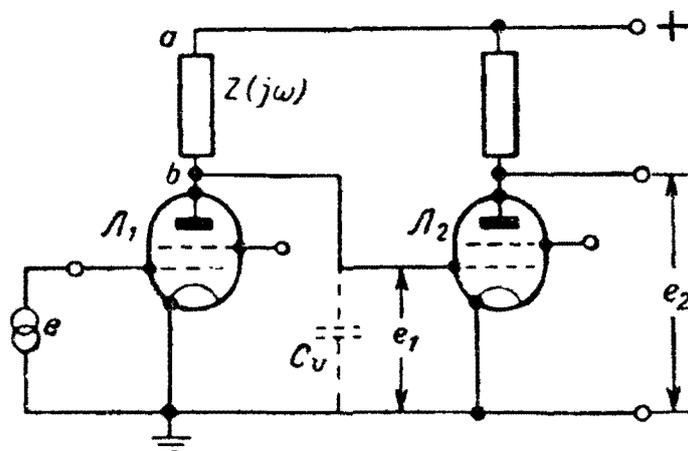


Рис. 84,б. Схема распределения шунтирующих емкостей при включении в анодную цепь двухполюсника.

Рассмотрим вопрос о максимальной возможной скорости реагирования усилителя на скачкообразный сигнал, с учетом влияния шунтирующих емкостей $C_{ак}$ и $C_{ск}$.

Наибольшая скорость изменения анодного потенциала e_a отдельной лампы получится при отсутствии в анодной

цепи активной или реактивной нагрузки, когда анодный ток лампы будет проходить через емкость анод—катод, т. е.

$$\left(\frac{de_a}{dt}\right)_{\max} = \frac{i}{C_{ак}}. \quad (254)$$

Если i является скачком анодного тока I , вызываемым скачком сеточного напряжения e с амплитудой E , то весь установившийся анодный ток будет протекать через шунтирующую емкость с постоянной скоростью изменения

$$\left(\frac{de_a}{dt}\right)_{\max} = \frac{ES}{C_{ак}}. \quad (255)$$

Если эта лампа связана со второй лампой и анодной нагрузкой является двухполюсник, тогда к емкости $C_{ак}$ добавится емкость $C_{ск}$ и скорость изменения анодного напряжения e_a , а также сеточного напряжения e_1 следующей лампы будет

$$\left(\frac{de_a}{dt}\right)_{\max} = \frac{ES}{C_{ак} + C_{ск}} = \frac{ES}{C_v}, \quad (256)$$

где C_v — полная емкость лампы $C_{ак} + C_{ск}$.

Отношение S/C_v для данной лампы может быть принято за меру ее качества, так как оно определяет максимальную скорость реагирования лампы на усиливаемый сигнал. Таким образом, для того, чтобы усилитель обладал максимальной скоростью реагирования на сигнал и, следовательно, давал лучшее воспроизведение сигнала, крутизна характеристики должна быть возможно большей, а величина шунтирующей емкости — возможно меньшей*.

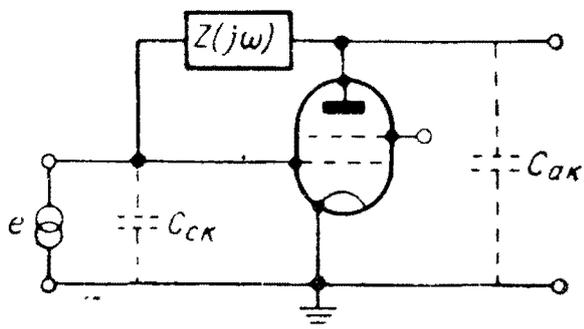


Рис. 84,в. Схема распределения шунтирующих емкостей при наличии обратной связи.

Если шунтирующие емкости $C_{ак}$ и $C_{ск}$ разделены четырехполюсником, то эффективная шунтирующая емкость будет меньше их суммы и ее можно считать равной среднему гео-

* Это требование привело к разработке специальных ламп с высоким отношением S/C_v . Оно может быть чрезвычайно высоким в лампах, использующих вторичную эмиссию, например, в лампах с электронным умножением.

метрическому из $C_{ак}$ и $C_{ск}$. Тогда качество лампы будет определяться отношением $S/\sqrt{C_{ак}C_{ск}}$. Это отношение больше чем в предыдущем случае, поэтому имеется возможность получить бóльшую скорость реагирования при применении четырехполюсника в качестве анодной нагрузки, хотя не всегда при наилучшей форме сигнала.

Определим максимально возможную скорость изменения анодного потенциала N -ой лампы усилителя с анодной нагрузкой в виде двухполюсника (рис. 84,б). Если C_v — суммарная шунтирующая емкость, то максимальная скорость изменения анодного потенциала первой лампы при отсутствии анодной нагрузки определяется выражением (256). Интегрируя, получаем

$$e_a = \frac{ES}{C_v} \int dt = \frac{E \cdot S \cdot t}{C_v} + K_1. \quad (257)$$

Если схема в начальный момент была в состоянии покоя, т. е. $e_a = 0$, при $t = 0$, то постоянная интегрирования $K_1 = 0$.

Переменное напряжение e_a создает на сетке второй лампы напряжение e_1 . Потенциал анода второй лампы будет

$$e_2 = \int \frac{e_1 S}{C_v} dt = E \left(\frac{S}{C_v} \right)^2 \int t dt = \frac{E}{2} \left(\frac{St}{C_v} \right)^2 + K_2, \quad (258)$$

K_2 также будет равно нулю, если $e_2 = 0$ при $t = 0$.

Это напряжение подается на сетку лампы третьей ступени и т. д. Повторный процесс интегрирования даст анодный потенциал e_N лампы N -ой ступени

$$e_N = \int \frac{e_{N-1}}{C_v} S dt = \frac{E}{N!} \left(\frac{St}{C_v} \right)^N. \quad (259)$$

Практически полное сопротивление анодной нагрузки $Z(j\omega)$ будет иметь конечную величину, и анодный потенциал e_N будет иметь такую величину только в момент $t = 0$. Начиная с этого момента через анодное сопротивление потечет ток и потенциал на аноде будет меньше e_N .

Предположим, что сопротивление анодной нагрузки, независимо от ее типа, равно при нулевой частоте активной составляющей R , т. е. $|Z(0)| = R$. Тогда установившееся значение усиления напряжения E , поданного на сетку, спустя некоторое время, зависящее от влияния реактивной составляющей анодной нагрузки на переходные процессы, после внезапной подачи этого напряжения на сетку, становится

равным SR . Установившееся максимальное напряжение на выходе N -ой ступени после этого интервала времени будет

$$(e_N)_{\text{макс}} = E(SR)^N. \quad (260)$$

Напряжение e_N , определяемое уравнением (259), может быть выражено как часть от максимального напряжения $(e_N)_{\text{макс}}$, т. е.

$$\frac{e_N}{(e_N)_{\text{макс}}} = \frac{1}{N!} \left(\frac{t}{RC_v} \right)^N. \quad (261)$$

Это выражение, строго говоря, действительно только при $t=0$; но оно удобно для определения максимальной скорости нарастания потенциала на аноде N -ой лампы и достаточно точно, если рассматриваются напряжения $e_N \ll (e_N)_{\text{макс}}$. Графики отношения $e_N/(e_N)_{\text{макс}}$, построенные по уравнению (261), приведены на рис. 85 для $N=1, 2, 3, 4, 6, 8$ и 10 . Из рисунка можно видеть, что сигнал e_N на выходе усилителя достигает значения, например, $0,1 (e_N)$, в течение некоторого времени, которое растет с увеличением числа усилительных каскадов и является кажущимся временем задержки сигнала.

Такие кривые нарастания сигналов в общем виде типичны также и для пассивных фильтров нижних частот, состоящих из цепочки последовательно или параллельно включенных емкостей, соединенных реактивными элементами. В отличие от усилителя, в таких фильтрах имеется взаимодействие между различными звеньями, но характер кривых нарастания для них остается таким же.

В реальных усилителях форма кривых нарастания сигнала в различных каскадах зависит в каждом случае от типа анодной нагрузки. Кривые рис. 85 дают верхний теоретический предел для скорости нарастания анодного напряжения и минимальные значения кажущегося времени задержки. Интересно сравнить кривые для реального усилителя (рис. 51)* с этими теоретическими предельными кривыми. Время задержки сигнала было проверено опытным путем для усилителя, содержащего шестьдесят четыре каскада. При таком большом числе каскадов сигнал на выходе усилителя оставался равным нулю в течение продолжительного времени и затем начинал нарастать так, как если бы фронт его имел определенную скорость распространения в усилителе, что,

* А также кривые тетродного усилителя рис. 82б, для которых $RC \doteq \sqrt{2^{1/N}-1}$.

как было показано, обусловлено влиянием шунтирующих емкостей лампы.

Простейшей формой анодной нагрузки является активное сопротивление. В этом случае $Z(j\omega)$ на рис. 84,б становится равным R . Наличие этого сопротивления уменьшает скорость нарастания сигнала так, что ее среднее значение становится ниже предельного значения, вычисленного выше. Например, напряжение на аноде первой лампы начнет нарастать со скоростью ES/C_v , но эта скорость будет экспоненциально при-

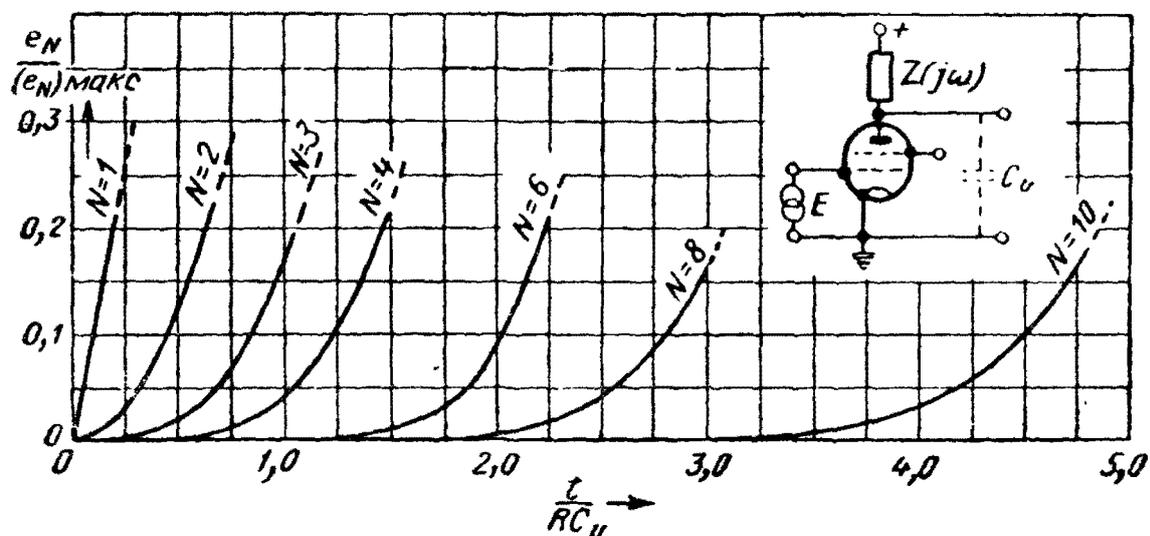


Рис. 85. Максимальные теоретические скорости нарастания сигнала в N -каскадном усилителе.

ближаться к нулю по мере достижения максимального значения ESR . На рис. 86 приведены кривые нарастания сигнала для определенной лампы (S и C_v постоянны) с различными сопротивлениями нагрузки R_1, R_2, R_3 и R_4 . Здесь же даны кривые спада сигнала, соответствующие подаче отрицательного скачка напряжения $-E$ в момент $t=T$. В совокупности эти кривые дают форму выходного сигнала, создаваемого прямоугольным импульсом произвольной длительности T .

В виду того, что кривая нарастания начинается с момента $t=0$, когда схема была в состоянии покоя, а кривая спада начинается с момента $t=T$, когда напряжение сигнала достигло какой-то величины, спадание будет происходить медленнее (см. § 42), вследствие чего форма выходного сигнала будет асимметричной. Ясно, что степень асимметрии возрастает по мере того, как T уменьшается по сравнению с постоянной времени RC_v . Если $RC_v \ll T$, сигнал практически достигает установившегося значения до начала спада-

ния. На практике обычно стремятся получить выходной сигнал с примерно одинаковыми средними значениями времени нарастания и спадания, т. е. почти симметричной формы (при входном сигнале в виде прямоугольного импульса). Некоторого улучшения кривых для случая чисто активной анодной нагрузки можно получить подключением к R некоторых реактивных элементов, обладающих свойствами поддерживать скорость изменения потенциала на аноде близкой к теоретическому максимальному значению ES/C_v в течение длительного времени. Это показано пунктирной кривой на рис. 86. Какой бы ни была форма кривой нарастания, выход-

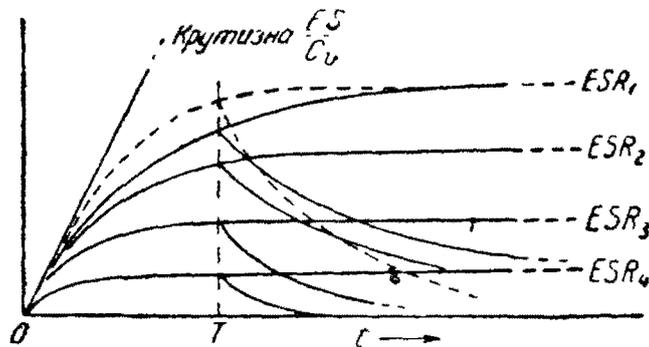


Рис. 86. Влияние сопротивления анодной нагрузки на форму сигнала при подаче на вход скачка. Анодная нагрузка $R_1 > R_2 > R_3 > R_4$.

ной сигнал, создаваемый прямоугольным импульсом длительностью T , становится все более асимметричным при уменьшении T по сравнению с постоянной времени RC_v . Асимметрия уменьшается при увеличении скорости нарастания, причем последняя не может превысить предельного значения, определяемого уравнением (261).

Выше уже были рассмотрены различные схемы анодной нагрузки, состоящей из активного сопротивления R и реактивных элементов. Наиболее важные из них представлены на рис. 51, 57 и 78. В настоящем параграфе речь шла не столько о форме выходного сигнала, сколько об его величине, для того, чтобы определить факторы, ограничивающие усиление каскада и абсолютную скорость нарастания сигнала. При этом было показано, что для усиления импульса длительностью T с минимальными искажениями, нужно брать возможно меньшую величину постоянной времени RC_v . Во всех упомянутых схемах анодной нагрузки имелась емкость $C_{ак}$ между анодом и катодом и $C_{ск}$ между сеткой и катодом. Следует избегать включения дополнительных емкостей, если только не требуется выравнивать емкости лампы.

При заданных значениях C_v (или C_{ak} и C_{ck}) величина R должна быть достаточно малой; она зависит от выбранной схемы анодной нагрузки (определяющей форму кривой нарастания сигнала) и времени T .

Очевидно существует нижний предел длительности импульса T , ниже которого усиление с данной лампой при любой схеме анодной нагрузки будет меньше единицы.

Это получается тогда, когда шунтирующая емкость лампы, заряжаясь и разряжаясь со скоростью ES/C_v , изменяет анодный потенциал в течение времени T на величину, равную изменению сеточного потенциала E .

При анализе пределов скорости нарастания сигнала в усилителе задача рассматривалась с точки зрения видеосигналов. Критерием точности воспроизведения сигнала являлась форма выходного сигнала при подаче на вход усилителя скачка или прямоугольного импульса. Однако сделанные выводы можно распространить на полосовые фильтры и модулированные колебания, если воспользоваться принципом эквивалентности полосового фильтра и фильтра нижних частот (см. § 41). В этом случае величина полного сопротивления нагрузки при нулевой частоте (активное сопротивление R) переходит в полное сопротивление нагрузки полосового усилителя при несущей частоте, которое во многих реальных схемах является активным сопротивлением.

Наибольшее усиление и скорость нарастания огибающей сигнала в полосовом усилителе получается также если полное сопротивление полосового фильтра, взятого в качестве анодной нагрузки, будет иметь на средней частоте наибольшую величину без дополнительных емкостей для увеличения шунтирующей емкости лампы. При этом скорость нарастания огибающей будет также ограничиваться факторами, установленными выше (рис. 85).

Эти выводы неприменимы, с теоретической точки зрения, к асимметричным полосовым фильтрам с соответственно асимметричными частотными характеристиками, так как такие фильтры не имеют низкочастотных эквивалентов, как было показано в § 33. Однако в большинстве схем (например, в телевизионных усилителях промежуточной частоты) асимметрия частотных характеристик настолько незначительна, что к ним можно применять общие выводы. В случае очень сильной асимметрии скорость нарастания огибающей сигнала несколько уменьшается. Это явление рассматривается подробнее в седьмой главе.

Рис. 87 иллюстрирует сказанное: усилитель a) имеет анодную нагрузку в виде активного сопротивления, зашунтированного

емкостью лампы C_v (показана схематически). Добавлением индуктивности L его можно настроить на несущую частоту модулированных колебаний, и все сказанное относительно видеосигнала будет справедливо для огибающей. Полосовой

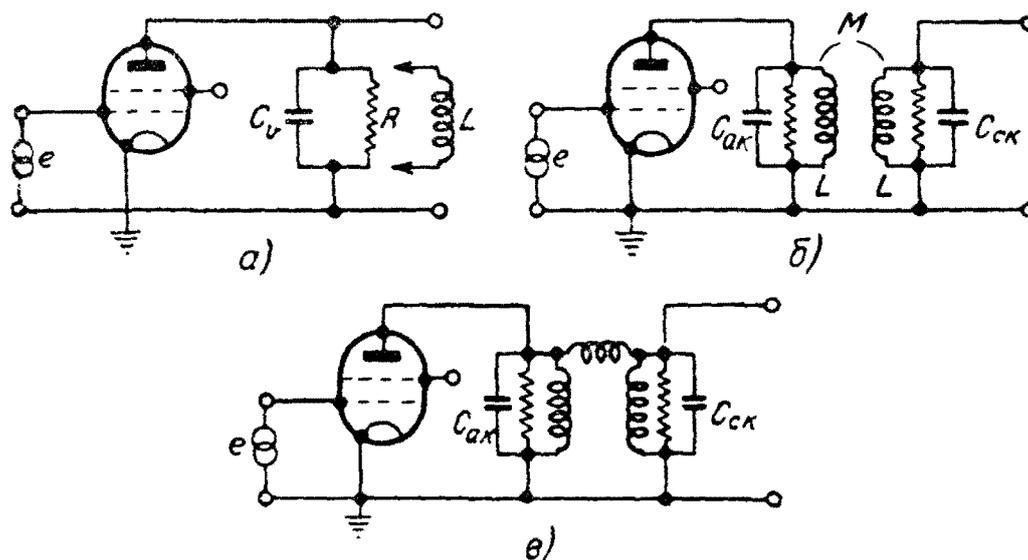


Рис. 87. Схемы усилителей:

а) усилитель с фильтром нижних частот, имеющим эквивалент полосового фильтра, б) и в) усилители, не имеющие такого эквивалента.

усилитель б) не имеет низкочастотного эквивалента, так как его схема асимметрична. Это можно видеть из его эквивалентной схемы в), в которой одна из ветвей не является резонансным контуром.

56. Постоянство произведения ширины полосы на коэффициент усиления

В связи с задачей вычисления предельной разрешающей способности многокаскадного усилителя оказывается интересным и полезным применение методов установившегося режима. Мы снова будем рассматривать усилитель с фильтром нижних частот, но выводы могут быть применены и к полосовым усилителям.

Прежде всего следует отметить, что если усилитель рассчитан на максимальное усиление при определенной полосе пропускания, то расширение этой полосы может быть достигнуто только за счет снижения усиления. Произведение ширины полосы на коэффициент усиления постоянно для данной лампы и анодной нагрузки. Это положение требует некоторого разъяснения, поэтому обратимся к рис. 88. На нем показаны схема усилительного каскада с нагрузкой из актив-

ного сопротивления R и некоторых реактивных элементов и его частотная характеристика. Реактивные элементы должны включать также шунтирующие емкости $C_{ак}$ и $C_{ск}$ и, поскольку каскад рассчитан на максимальное усиление, в схеме не должно быть никаких дополнительных шунтирующих нагрузку емкостей, кроме емкости лампы. Предполагается, что величины постоянной времени RC_v и реактивных элементов выбраны такими, что получаются заданные скорости нарастания сигнала и искажения. Характеристика на рис. 88,б

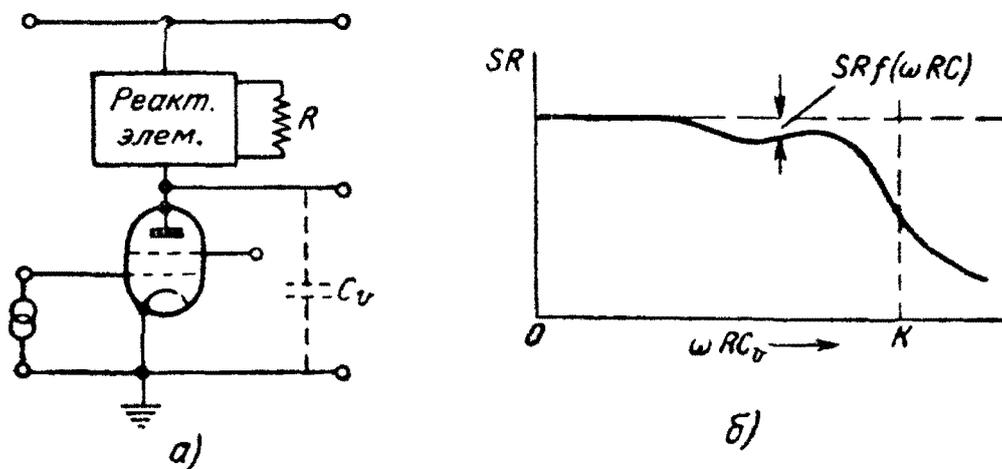


Рис. 88. Схема (а) и характеристика усиления (б) усилительного каскада.

вычерчена в функции от ωRC_v , как „универсальная“ характеристика* (см. § 28). Практические примеры таких характеристик даны на рис. 33,б, 52, 57 и 78,а. Можно также взять вместо постоянной времени RC_v частоту ω_0 и построить характеристику в функции от ω/ω_0 , как на рис. 44 и 46. В этом случае $1/\omega_0$ может быть выражено как кратное от RC_v .

Возьмем для примера характеристику, приведенную на рис. 78,а. Так как четырехполюсник должен иметь возможно большее полное сопротивление $|Z(\omega)|$ для получения максимального усиления каскада, то первая шунтирующая емкость $2C$ должна быть равна емкости $C_{ак}$ между анодом и катодом лампы, а вторая шунтирующая емкость C должна соответствовать емкости $C_{ск}$ между сеткой и катодом следую-

* Применение здесь емкости $C_v = C_{ак} + C_{ск}$ предполагает, что анодная нагрузка является двухполюсником. Однако такой же масштаб может быть применен и для четырехполюсной нагрузки. Можно также строить характеристику в функции от $RC_{ак}$ или $RC_{ск}$, так как эти величины определяют только условный масштаб по оси частот.

шей лампы. При этом могут возникнуть две трудности: а) шунтирующие емкости ламп могут не находиться в требуемом отношении 2:1, и б) вторая лампа может отсутствовать. В обоих случаях должны применяться дополнительные конденсаторы для получения нужных значений емкостей.

Примем в рассматриваемом примере (рис. 78,а) в качестве опорной частоту ω_0 , при которой усиление уменьшается вдвое по сравнению с максимальным значением. Тогда

$$\omega_0 RC = 0,86 = k.$$

Частота ω_0 может служить для определения нормальной ширины полосы пропускания усилителя, но все же это совершенно условная величина. Усиление усилителя при нулевой частоте равно SR и если R уменьшить до величины R/n , где n — произвольное постоянное число, то усиление также уменьшится до SR/n . В то же время частота ω_0 должна возрасти до $n\omega_0$ для того, чтобы величина k оставалась постоянной

$$n\omega_0 \frac{R}{n} C = k. \quad (262)$$

В этой точке характеристика усиления должна также снижаться до половинного значения. В то же время индуктивность L должна быть уменьшена, чтобы сохранить равенство $L/CR^2 = 2$, являющееся необходимым условием сохранения формы этой характеристики. Уместно вспомнить, что $\sqrt{L/CR^2}$ является добротностью контура Q .

Если рассматривается более сложная схема нагрузки, содержащая несколько контуров, то величины различных элементов должны регулироваться так, чтобы значение Q каждого контура было постоянным при изменении ω_0 .

Произведение коэффициента усиления и номинальной ширины полосы может быть записано так:

$$SR\omega_0 = \omega_0 RC \frac{S}{C} = k \left(\frac{S}{C} \right) \quad (263)$$

и является постоянной величиной.

Произведение $SR\omega_0$ пропорционально отношению S/C , которое само зависит от „коэффициента качества“ лампы S/C_v .

На рис. 88,б представлена типичная частотная характеристика усилительного каскада. При $\omega = 0$ усиление равно SR , а при более высоких частотах оно отклоняется от этой величины. Это отклонение от максимального значения, харак-

теризующее амплитудные искажения, можно выразить в функции от ωRC . Тогда коэффициент усиления каскада равен

$$SR [1 - f(\omega RC)], \quad (264)$$

где $f(\omega RC)$ должно быть мало по сравнению с единицей, чтобы изменение усиления на любой частоте, содержащейся в спектре входного сигнала, было незначительным. Общее усиление N таких каскадов будет равно

$$(SR)^N [1 - f(\omega RC)]^N, \quad (265)$$

как уже было показано в § 53 [уравнение (251)]. Разлагая это выражение по формуле бинома, получим, что усиление N ступеней равно

$$\begin{aligned} (SR)^N \left[1 - N \cdot f(\omega RC) + \frac{N(N-1)}{2!} f(\omega RC)^2 + \dots \right] \approx \\ \approx G [1 - N \cdot f(\omega RC)], \end{aligned} \quad (266)$$

где $G = (SR)^N$ — общее максимальное усиление. Таким образом, общие амплитудные искажения $Nf(\omega RC)$ в N раз больше, чем искажения в одном каскаде.

Фазовые искажения также возрастают пропорционально N . Если $\varphi(\omega)$ — фазовый сдвиг в одном каскаде, то общий фазовый сдвиг при N каскадах будет $N\varphi(\omega)$, как было также показано в § 52 [уравнение (247)].

До сих пор не упоминалось об отрицательной обратной связи и ее влиянии на характеристики многокаскадного усилителя. При наличии отрицательной обратной связи оказывается возможным уменьшить отклонение величины усиления от его максимального значения, равного SR , и таким образом расширить полосу частот, в пределах которой усиление остается почти постоянным. Однако отрицательная обратная связь вместе с этим уменьшает усиление. Сомнительно, можно ли получить при этом большее по величине произведение коэффициента усиления на ширину полосы.

Обратная связь в многокаскадных усилителях может быть осуществлена самыми различными способами, однако это очень трудная проблема и общего решения ее не найдено*. Легче поддается расчету обратная связь в отдельном каскаде между цепями анода и управляющей сеткой лампы. Эта обратная связь может быть самой разнообразной: она может, например, осуществляться по напряжению или току, быть или не быть функцией частоты и т. д. На рис. 84, в схема-

* См. например, книгу Т. Бодэ: „Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью“, Госинформиздат, 1948.

тически представлен усилительный каскад, в котором энергия передается из анодной цепи в цепь управляющей сетки через сопротивление обратной связи $Z(j\omega)$.

Такую схему можно считать двусторонней в том отношении, что сигнал может передаваться лампой и в обратном направлении через сопротивление $Z(j\omega)$. Прямой и обратный пути прохождения сигнала различны, но в отношении передачи энергии между входными и выходными зажимами эту схему можно рассматривать как двусторонний четырехполюсник. Емкости C_{ak} и C_{ck} подключены к входным и выходным зажимам и соединены между собой через сопротивление $Z(j\omega)$, которое может быть в частном случае реактивным. Таким образом в этой схеме имеются все признаки, позволяющие рассматривать ее как четырехполюсное звено фильтра. Подбором различных постоянных схемы параметров лампы, величины $Z(j\omega)$ и формы обратной связи — можно установить требуемые частоты среза. Можно, далее, добиться того, что схемы этого типа будут иметь характеристики, подобные характеристикам уже рассмотренных схем, в которых в качестве анодной нагрузки применяются нормальные звенья фильтров с активным нагрузочным сопротивлением.

Не существует общего правила относительно того, какой тип усилителя — с обратной связью или без нее — более пригоден для усиления коротких импульсов и скачков напряжения. Детальное рассмотрение этого вопроса слишком обширно для включения его в данную книгу.

57. Оптимальное количество каскадов усиления

Предположим, что требуется усилитель с общим усилением G и заданным процентом искажений. Сразу возникает задача определения числа ступеней N . В предыдущем параграфе было показано, что произведение усиления на ширину полосы пропускания постоянно, но „ширина полосы“ является условной величиной. Усиление ступени меняется от максимального значения SR при нулевой частоте (или при средней частоте в случае полосового фильтра) так, как показано на рис. 88.

Наибольшее отклонение от максимального значения в большинстве реальных усилителей получается на высоких частотах. Таким образом, может казаться, что лучшие результаты будут получены при применении широкополосных ступеней, чтобы усиливаемый сигнал мог занимать сравнительно равномерный участок характеристики, соответствующий более низким частотам. Однако при такой широкой

полосе получается очень низкое усиление и, следовательно, потребуется большее число усилительных каскадов N , либо усиление на каскад может оказаться даже меньше единицы. При очень большом числе каскадов N незначительные отклонения в амплитудной или, что еще важнее, в фазовой характеристике отдельного каскада, будут накапливаться, и могут привести к недопустимым искажениям.

С другой стороны, путем уменьшения ширины полосы до величины, при которой искажения спектра сигнала еще допустимы, можно получить наибольшее усиление на каскад и свести их число к минимуму.

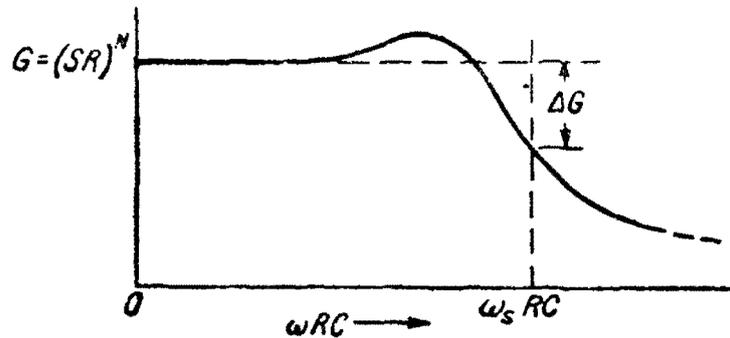


Рис. 89. Характеристика усиления N -каскадного усилителя.

Путь решения этой задачи может быть найден из рассмотрения допустимых искажений для всего усилителя и равномерного распределения их на все N каскадов (считая, что они все идентичны). Оптимальное число каскадов N устанавливается окончательно путем ряда прикидок.

Предположим, что в качестве меры допустимых искажений принято снижение усиления G до величины $(G - \Delta G)$ на некоторой верхней граничной частоте ω_s (рис. 89). Тогда можно принять следующий порядок расчета:

1) выбирается некоторое число каскадов N , и общее падение усиления ΔG делится на N равных частей [см. приближенное уравнение (266)];

2) по характеристике усиления одного каскада находится значение ωCR , при котором падение усиления равно $\Delta G/N^*$. Так как эта точка будет при $\omega = \omega_s$, и поскольку величина C обусловлена емкостями лампы, этим определяется величина R ;

3) проверяется, получается ли при этой величине R требуемое усиление $G = (SR)^N$.

* Можно конечно пользоваться и фазовой характеристикой, определив по ней ω_s , при которой получаются допустимые искажения.

Если значение усиления получается меньше требуемого, то берется новое значение N , и так до тех пор, пока не получатся удовлетворительные результаты. Практически оптимальное значение N находится очень быстро, но оно обычно не критично, за исключением тех случаев, когда тип анодной нагрузки обуславливает резкое падение характеристики.

Точное вычисление оптимального числа каскадов возможно в том случае, когда известно аналитическое выражение характеристики усиления отдельного каскада, но практическое значение такого вычисления ограничено. Тем не менее следует указать общий порядок расчета для этого случая.

Усиление одного каскада при нулевой частоте равно SR , а на любой другой частоте $S|Z(\omega)|$, где $|Z(\omega)|$ — полное сопротивление анодной нагрузки. Как было показано, характеристику усиления удобнее строить в функции от ωRC , а не от ω , и на основании этого можно выразить падение усиления, как $SR - S|Z(\omega RC)|$. Но это падение усиления было ранее записано в виде $SR \cdot f(\omega RC)$ [уравнение (264) и рис. 88], так что усиление одного каскада равно $SR [1 - f(\omega RC)]$. На частоте ω_s усиление при N каскадах должно быть $G(1 - \Delta)$, где $G = (SR)^N$. Тогда

$$G [1 - f(\omega_s RC)]^N = G(1 - \Delta).$$

В выражении $f(\omega_s RC)$ можно представить $\omega_s RC$ как $\omega_s SR \cdot C/S$, так что

$$[1 - f(\omega_s G^{1/N} \cdot C/S)] = (1 - \Delta)^{1/N}. \quad (267)$$

Значение N , дающее максимальную величину ω_s , может быть найдено, если продифференцировать это уравнение по N и приравнять его нулю обычным способом.

Следует также помнить, что фазовая характеристика может дать еще бóльшую точность определения искажений сигнала, особенно при большом N . В этом случае значение $\omega_s RC$, соответствующее наивысшей пропускаемой частоте спектра сигнала, должно выбираться на основе допустимых фазовых искажений, т. е. допустимого отклонения фазовой характеристики в полосе частот от $\omega = 0$ до ω_s от идеальной линейной формы.

58. Отношение сигнала к шуму и оптимальная ширина полосы

Верхний предел чувствительности приемника определяется интенсивностью шумов, создаваемых в его входных цепях и лампе первого каскада. Полезный сигнал, сравнимый

с уровнем шумов, будет минимальным обнаруживаемым сигналом и добавление усилительных каскадов не улучшит положения, так как они будут усиливать сигнал и шумы одновременно. Напряжение шумов создается в антенне и активных сопротивлениях схемы вследствие хаотического теплового движения зарядов, а также в электронных лампах вследствие того, что электронная эмиссия по своей природе нерегулярна. Практически считается, что наибольшее напряжение шумов создается во входных цепях и лампе первого каскада, так как эти шумы в дальнейшем больше всего усиливаются. Однако иногда, в частности, в супергетеродинных приемниках для сверхвысоких частот, первый каскад дает незначительное усиление, так что во втором каскаде может создаваться заметное напряжение шумов. К этому будет также добавляться напряжение шумов, создаваемое лампой местного гетеродина. Общее напряжение шумов зависит, до некоторой степени, от типа схемы первых каскадов и цепей связи.

Форма напряжения шумов совершенно случайна, это значит, что напряжение, измеренное за какой-либо период времени, не повторится снова никогда. На экране электронного осциллографа шумы представляются в виде полосы непрерывно изменяющихся по амплитуде остроконечных импульсов, как это видно из фотографии на рис. 90, где показаны шумы на выходе приемника, наложенные на сигнал прямоугольной формы. Предельная чувствительность приемника измеряется практически путем подачи на его вход сигнала прямоугольной формы от градуированного генератора сигнала и регулировки уровня этого сигнала до уровня наблюдаемых шумов. Наблюдения могут производиться или с помощью осциллографа (субъективный, хотя и достаточно точный метод), или с помощью теплового измерительного прибора, дающего действующее значение напряжения шумов.

Несмотря на произвольный характер напряжения шумов, оно имеет определенное действующее значение, так что тепловой прибор дает установившееся показание. Можно сказать, что шумы дают непрерывный спектр синусоидальных составляющих с одинаковыми амплитудами, но произвольными фазами (рис. 90). Этим спектр шумов отличается от спектра импульса бесконечно малой длительности. Если пропускать шумы через идеализированный полосовой фильтр с постоянной шириной полосы $\pm \omega_1$, но с меняющейся средней частотой ω_0 , то энергия на выходе фильтра будет постоянной, независящей от значения ω_0 . Более того, если ширина полосы будет изменяться,

то количество энергии, пропускаемой фильтром, будет всегда пропорционально ширине полосы. Шумы, создаваемые в различных цепях, возникают только в активных, но не в реактивных элементах, хотя на высоких частотах активная со-

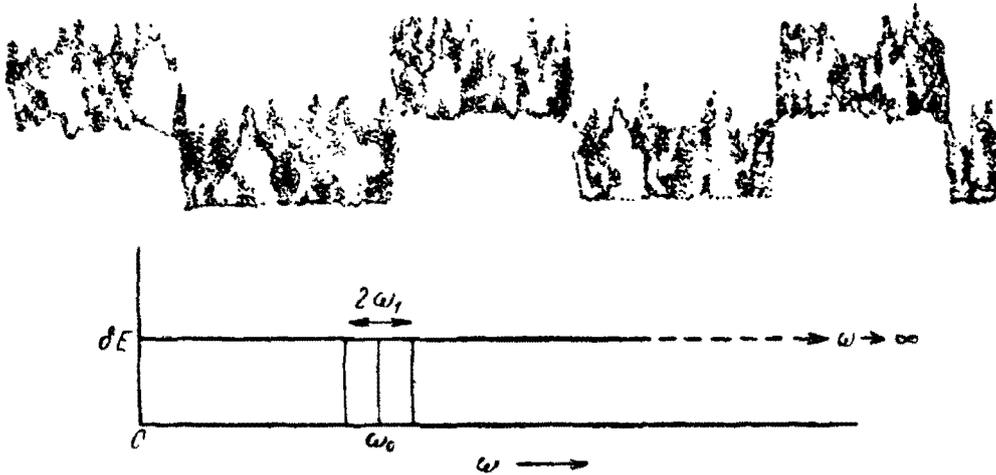


Рис. 90. Форма и спектр внутренних шумов усилителя. Приведен только амплитудный спектр, так как фазы составляющих шумового сигнала случайны.

ставляющая может появиться и в номинально реактивных элементах, вследствие различных потерь.

Действующее значение напряжения шумов $E_{ш}$ на зажимах активного сопротивления R зависит от величины этого сопротивления и абсолютной температуры $T^{\circ}K$

$$E_{ш} = \sqrt{4kTBR} \text{ в,} \quad (268)$$

где B — ширина полосы в герцах и k — постоянная Больцмана, равная $1,380 \cdot 10^{-23}$ джоулей/градус.

Напряжение внутренних шумов между анодом и катодом лампы носит, в общем, такой же характер, поэтому можно сказать, что лампа эквивалентна некоторому активному сопротивлению, в котором может создаваться такое же напряжение шумов. Обычно принято относить это сопротивление к сетке лампы. Таким образом, эффективное шумовое сопротивление лампы рассматривается, как активное сопротивление между сеткой и катодом, находящееся при той же абсолютной температуре, что и остальные элементы сеточной цепи.

Ширина полосы B в уравнении (268) принимается равной ширине приведенной прямоугольной характеристики фильтра. Как было уже сказано, напряжение шумов пропорционально \sqrt{B} независимо от средней частоты, поскольку шумовой спектр можно считать равномерным.

Однако характеристики реальных фильтров отличаются от идеальной. Для учета их влияния на напряжение шумов удобно рассматривать очень узкую полосу B , так что в выражении (268) можно считать, что $B \rightarrow \delta\omega$

$$\delta E_m = V \sqrt{4kTR\delta\omega}. \quad (269)$$

Далее, поскольку спектр любого сигнала, который должен быть принят и который вместе с шумами пройдет через избирательные цепи приемника, неоднороден (если только сигнал не является импульсом бесконечно малой длительности), то следует ожидать, что изменение ширины полосы избирательных цепей будет иметь различное влияние на сигнал и на шумы. Действительно, можно показать, что существует критическая ширина полосы, при которой получается максимальное отношение сигнала к шуму, если это отношение измерять определенным образом.

Если $|Z(\omega)|$ представляет модуль характеристики приемника, измеренный как отношение напряжения на выходных зажимах к напряжению на входных зажимах, и если принять, что все шумы возникают в сопротивлении R между входными зажимами и совершенно не возникают в остальных звеньях, то напряжение на выходе легко вычислить. Эту характеристику можно представить себе разделенной на узкие полосы шириной $\delta\omega$, каждая из которых пропускает составляющую шумов, определяемую по уравнению (269).

Общая мощность шумов на выходе приемника будет пропорциональна сумме всех этих составляющих от нулевой до бесконечно большой частоты, т. е. пропорциональна

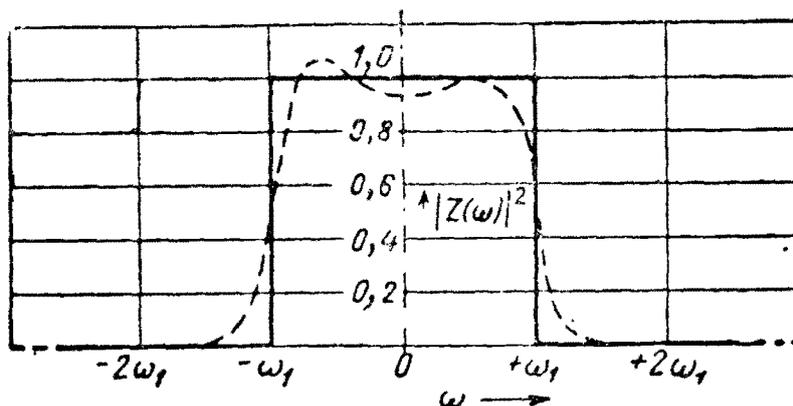
$$4kTR \int_0^{\infty} |Z(\omega)|^2 d\omega. \quad (270)$$

Иными словами она пропорциональна площади модуля характеристики приемника с ординатами, возведенными в квадрат.

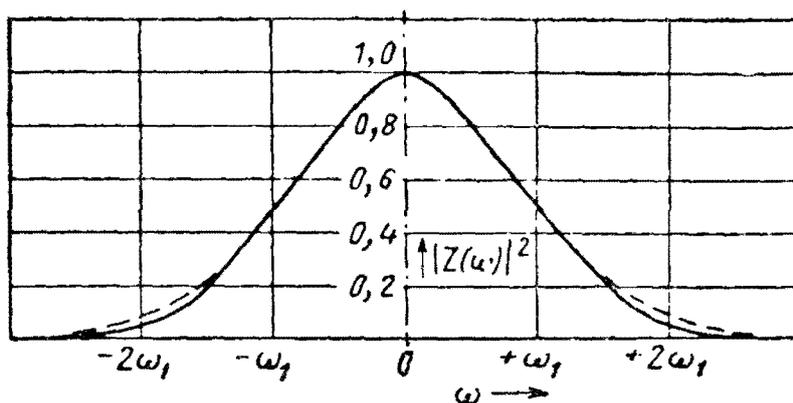
Фазовая характеристика не оказывает влияния на мощность шумов вследствие произвольного характера фазового спектра шумов.

Если два приемника имеют характеристики различной формы (включая разные уровни усиления), но одинаковый вход, т. е. одинаковые сопротивления между входными зажимами, тогда мощность шумов на их выходе будет пропорциональна отношению площадей модулей их характеристик, возведенных в квадрат.

Интересно рассмотреть два идеализированных случая, которые лучше всего приближаются к реальным условиям, — цепи с прямоугольной (рис. 69) и вероятностной (рис. 75, а кривая 2) характеристиками. Эти кривые уже рассматривались (§ 53) как предельные характеристики усилителя и прием-



а)



б)

Рис. 91. Кривые $|Z(\omega)|^2$ для двух идеализированных характеристик:

а) для идеализированной прямоугольной характеристики (пунктиром приведена для сравнения характеристика типового шестикаскадного усилителя промежуточной частоты); б) для „вероятностной“ характеристики (пунктиром приведена для сравнения характеристика шестикаскадного резонансного усилителя).

ника, содержащего очень большое число каскадов. Большинство реальных характеристик заключены между этими типами (см. § 54). Как было показано в § 53 и представлено на рис. 82, вероятностная характеристика очень близка к характеристике многокаскадного усилителя с настроенными контурами.

Идеализированные характеристики изображены на рис. 91 с оординатами, возведенными в квадрат. Ширина полосы ве-

роятностной характеристики по точкам половинной амплитуды $\pm \omega_1$ равна ширине прямоугольной характеристики. На идеализированную прямоугольную характеристику наложена характеристика шестикаскадного усилителя промежуточной частоты, применявшегося автором, с нагрузкой в виде связанных настроенных контуров по схеме рис. 87,б. Это является иллюстрацией к методу выбора ширины полосы (§ 46) идеализированной характеристики, эквивалентной реальной характеристике (площади, ограниченные кривыми $|Z(\omega)|$, и средние значения уплощенной части равны). Площади, ограниченные кривыми $|Z(\omega)|^2$, на рис. 91,а отличаются только на 1%, так что для вычисления шумов можно воспользоваться идеализированной характеристикой с достаточной точностью. Точно также на вероятностную характеристику (рис. 91,б) наложена характеристика шестикаскадного приемника с резонансными контурами в анодных цепях, причем ординаты обеих кривых возведены в квадрат. Эти кривые также довольно точно совпадают, и ограничиваемые ими площади отличаются только на 3%.

Измерение площадей, ограниченных идеализированными характеристиками (с помощью планиметра или каким-либо другим способом), показывает, что если площадь прямоугольной характеристики принять равной $\omega_1 \times 100$ единиц, то площадь вероятностной характеристики будет $\omega_1 \times 103,5$ единиц. Соответствующие им мощности шумов будут отличаться, поэтому, только на 3,5%. Весьма вероятно, что любой реальный усилитель с такой же шириной полосы между точками половинной амплитуды будет иметь характеристику, занимающую промежуточное положение между идеализированными характеристиками, и мощность шумов на выходе его будет почти такая же. Таким образом, изменение формы характеристики не влияет сколько-нибудь существенно на мощность шумов на выходе.

Можно, очевидно, представить себе характеристики, которые будут сильно отличаться от идеализированных, как, например, характеристика плохо настроенного усилителя промежуточной частоты с полосовыми фильтрами, имеющая выбросы, выраженные резче, чем на пунктирной кривой рис. 91,а. Мощность шумов может получиться несколько иной, но такие случаи редко встречаются и поэтому не будут здесь рассматриваться.

Реакция усилителя на полезный сигнал с определенными амплитудным и фазовым спектрами, в отличие от произвольного спектра шумов, зависит от ширины полосы и формы передаточной характеристики. Интересно выяснить, как ме-

няется различимость сигнала на выходе на фоне шумов, и в какой мере это зависит от ширины полосы, так как этот вопрос часто имеет большое значение для широкополосных усилителей телевизионных и радиолокационных приемников.

С этой целью удобно рассмотреть полезный сигнал в форме прямоугольного импульса (или элемента изображения) дли-

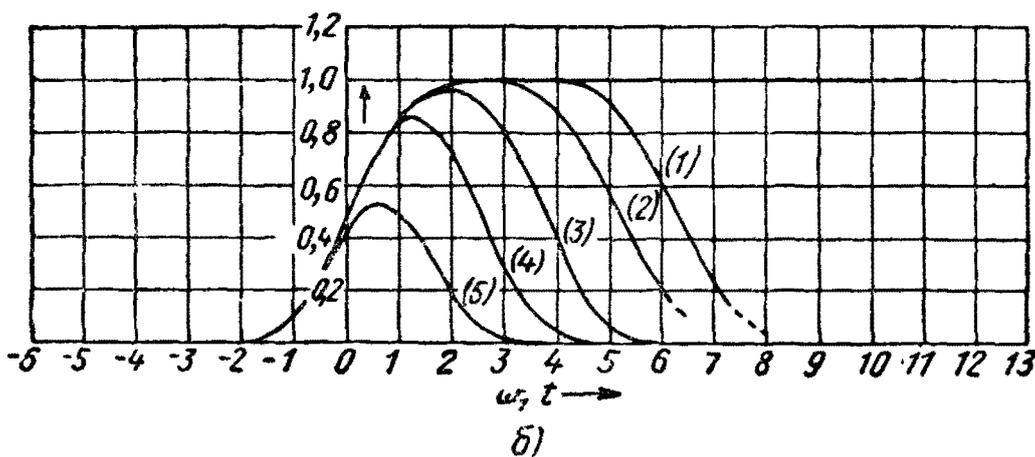
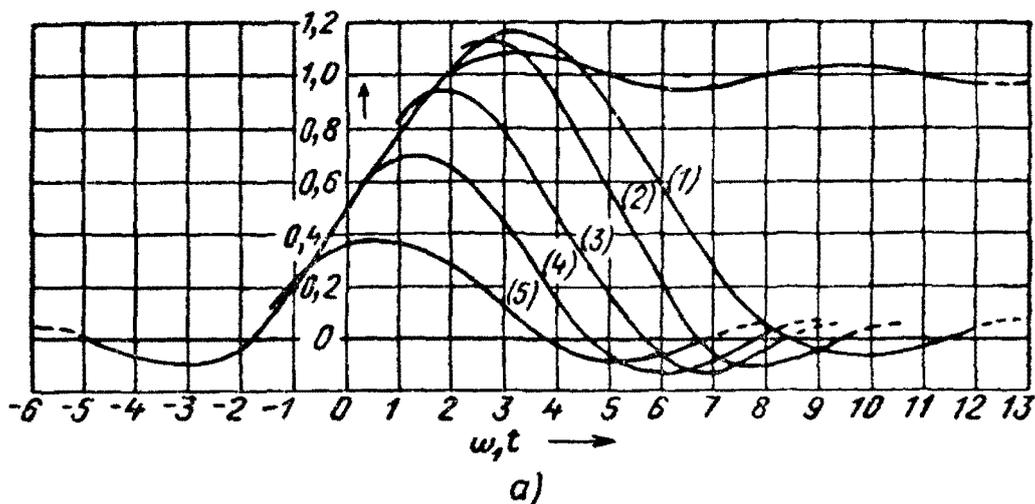


Рис. 92. Реакция цепей с идеализированными прямоугольной *а*) и „вероятностной“ *б*) характеристиками на прямоугольный импульс длительности T_1 . Кривые соответствуют следующим значениям T_1 :

$$(1) - 2\pi/\omega_1; (2) - 0,8 \frac{2\pi}{\omega_1}; (3) - 0,6 \frac{2\pi}{\omega_1}; (4) - 0,4 \frac{2\pi}{\omega_1}; (5) - 0,2 \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

тельностью T_1 (см. рис. 77, *а*) и оценить, как изменяется отношение сигнала к шуму на выходе усилителя, если ширина полосы усилителя изменяется относительно $1/T_1$ для прямоугольной и вероятностной характеристик (рис. 91). Фазовая характеристика усилителя, вообще говоря, будет влиять на выходной сигнал, но мы будем считать ее линейной. Это вполне допустимо, если предположить, что идеализированные характеристики относятся к усилителю, содер-

жащему большое число каскадов, так как для того, чтобы приемник имел общую полосу пропускания шириной ω_1 на некотором условном уровне (например, по точкам половинной мощности), каждый отдельный каскад должен иметь полосу гораздо шире, чем ω_1 . Следовательно, общая полоса усилителя занимает более линейную часть фазовой характеристики, чем полоса отдельного каскада.

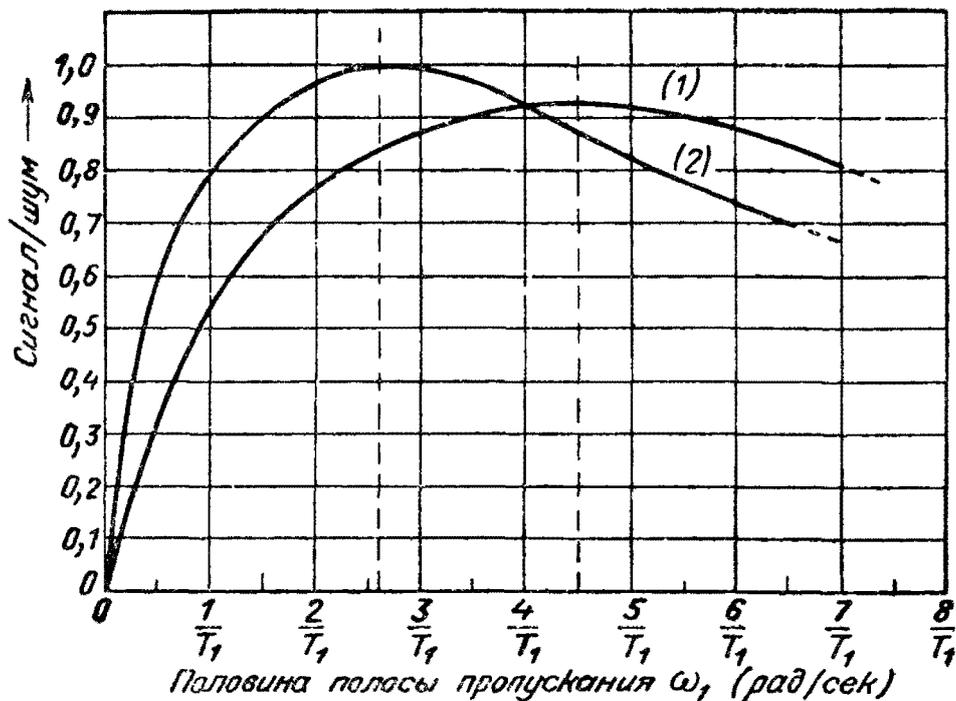


Рис. 93. Отношение сигнала к шуму при прямоугольной (кривая 1) и „вероятностной“ (кривая 2) характеристиках.

Этот вопрос рассматривался уже в § 53, где было показано (рис. 82), что практически шесть каскадов можно считать уже большим числом.

Форма сигнала на выходе усилителя с идеализированными характеристиками при подаче на вход скачка напряжения была уже определена. Так, сигнал на выходе усилителя с прямоугольной характеристикой представлен на рис. 70, форма его выражается интегральным синусом [уравнение (230)]. Сигнал на выходе усилителя с вероятностной характеристикой приведен на рис. 75,б (кривая 2), форма его определяется „интегралом вероятности“ [уравнение (237)] и рассмотрена в § 53.

Оба сигнала воспроизведены снова на рис. 92 вместе с выходными сигналами, создаваемыми импульсами различной длительности T_1 , которую можно рассматривать как величину, обратную ширине полосы ($2\pi/\omega_1$ сек). Эти сигналы

были определены по переходной функции $h(t)$, согласно § 42 (по принципу суперпозиции).

Определенные таким образом и представленные на рисунках сигналы могут быть отнесены к импульсам любой длительности и к любой ширине полосы в выбранных пределах.

Имеется много способов оценки величины сигнала, но для задачи определения ширины полосы, дающей максимальное отношение сигнала к шумам применительно к телевизионным и радиолокационным приемникам, удобнее брать амплитудное значение полезного сигнала и эффективное значение шумов. Амплитудное значение сигналов при различной ширине полосы может быть взято из рис. 92, а мощность шумов по площади характеристик из рис. 91. Действующее значение напряжения шумов пропорционально $\sqrt{100 \cdot \omega_1}$ для прямоугольной характеристики и $\sqrt{103,5 \cdot \omega_1}$ для вероятностной характеристики.

Кривые отношения амплитуды сигнала к действующему значению напряжения шумов, вычерчены на рис. 93 для обеих характеристик в функции от половины ширины полосы ω_1 . Из этого рисунка видно, что существует оптимальная ширина полосы, равная $\omega_1 = 4,5/T_1$ для прямоугольной и $2,6/T_1$ для вероятностной характеристики.

При таких значениях ширины полосы, принятый сигнал (при прямоугольном входном импульсе длительностью T_1) будет иметь наибольшее превышение над шумами.

Эти кривые нельзя считать достаточно точными. Следует помнить, что они получены для идеализированных характеристик и очевидно в реальных приемниках оптимальная полоса будет лежать между этими оптимальными значениями. Максимумы на этих кривых выражены не резко, так что при изменении ширины полосы на 100% отношение сигнала к шумам падает только на 10%.

ГЛАВА VII

КАНАЛЫ С АСИММЕТРИЧНЫМИ БОКОВЫМИ ПОЛОСАМИ

59. Передача на одной боковой полосе, ее применение и особенности

Как уже было показано в § 15 главы II, спектр незатухающих колебаний, модулированных по амплитуде, содержит синусоидальные составляющие, расположенные симметрично относительно несущей частоты, и равен спектру модулирующего сигнала, но симметричному относительно нулевой частоты. Полоса частот, занимаемая спектром модулированного сигнала, зависит от модулирующего сигнала и увеличивается с повышением частоты его составляющих. Например, канал для радиотелефонной связи занимает полосу всего в несколько килогерц, тогда как для телевизионных каналов и каналов импульсной связи, предназначенных для передачи одиночных коротких сигналов и импульсов малой длительности, требуется полоса в несколько мегагерц.

В некоторых широкополосных системах связи можно получить определенные преимущества за счет сужения полосы, осуществляемого путем полного или частичного отфильтровывания одной из боковых полос, лежащих выше или ниже несущей частоты. Такие системы связи известны под названием однополосных или, соответственно, асимметричных („полуоднопослосных“) систем.

Так как спектр амплитудно-модулированных колебаний симметричен относительно несущей частоты, то с полным основанием можно сказать, что сигналы, передаваемые порознь нижней и верхней боковыми частотами, совершенно одинаковы, но должны отличаться от суммарного сигнала, передаваемого обеими полосами. Вопрос об искажении сигнала при однополосной передаче привлекал внимание многих авторов, рассматривавших его применительно к телевидению, радиотелефонной связи и телеграфной связи по проводам. В этой главе

вопрос об искажении модулированных колебаний вследствие полного или частичного подавления одной боковой полосы, будет рассмотрен в общем виде, чтобы полученные результаты могли быть приложены к любой системе связи.

Изучение влияния асимметрии боковых полос будет проведено с целью:

1) определить искажение при совпадении несущей частоты с частотой среза фильтра, когда одна боковая полоса практически полностью подавлена (однополосная передача);

2) определить искажения при расстройке фильтра относительно несущей, когда боковые полосы становятся асимметричными по амплитуде и фазе, но ни одна из них полностью не подавлена (передача с асимметричными боковыми полосами);

3) выяснить влияние асимметрии, присущей всем полосовым фильтрам (см. §§ 30, 31 и 33 главы III). Этот вопрос, хотя и представляет больше академический интерес, тем не менее важен в связи с теоремой об эквивалентности полосового фильтра и фильтра нижних частот и с принципом приведения несущей частоты к нулю.

Далее будет показано, что нарушение симметрии боковых полос амплитудно-модулированных колебаний влечет за собой искажение формы огибающей (а, следовательно, и полезного сигнала) и фазовую модуляцию несущих колебаний. Эти искажения зависят от формы модулированных колебаний и, как правило, величина их возрастает с увеличением глубины модуляции, так что задача связана с нелинейными соотношениями. Ввиду этого, искажения не могут быть полностью устранены с помощью корректирующих цепей, однако их можно свести к минимуму, применяя определенные меры предосторожности. Прежде чем переходить к анализу вопроса об искажениях рассмотрим различные системы связи с точки зрения возможных преимуществ и недостатков, получаемых при подавлении одной боковой полосы.

Однополосная передача применяется в течение многих лет в телефонной связи по проводам. Основные преимущества, получаемые при этом, состоят в удвоении числа каналов связи в заданном диапазоне частот, повышении коэффициента усиления усилителей и в общей экономии средств. В этом случае искажения вследствие подавления одной полосы очень незначительны или полностью отсутствуют, прежде всего благодаря тому, что низкие модулирующие частоты обычно ограничены некоторой частотой, существенно отличной от нулевой. Между несущей частотой и границей боковой полосы остается зазор (рис. 94,а), так что можно рассчитать фильтр, который будет полностью устранять одну боковую полосу.

Кроме того, можно предусмотреть способы повышения амплитуды несущей частоты, или эффективного уменьшения глубины модуляции, что, как будет показано позднее, уменьшает искажения огибающей, а, следовательно, и принимаемого сигнала.

В случае радиотелефонной связи проблема однополосной передачи существенно отличается, так как применяются более высокие несущие частоты, чем при телефонной связи по проводам и в то же время модулирующий сигнал содержит низкие частоты, вплоть до 30 гц (рис. 94,б). Это значит, что полное подавление одной боковой полосы осложняется

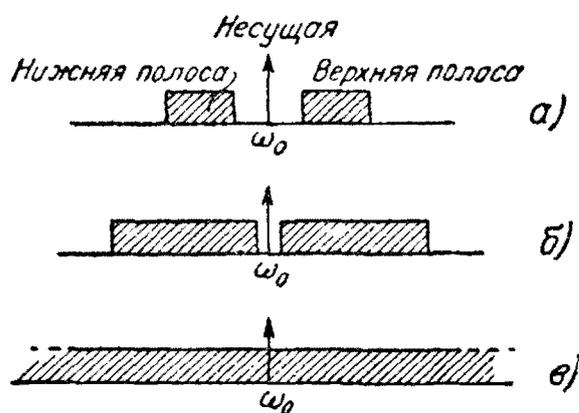


Рис. 94. Расположение боковых полос относительно несущей частоты.

а) канал телефонной проводной связи; б) радиосветотелеграфный канал; в) телевизионный канал.

вследствие трудности изготовления соответствующих фильтров. Внимание многих исследователей было обращено на проблему частичного подавления одной боковой полосы. Однако в большинстве опубликованных работ, посвященных этому вопросу, рассматривается только случай модуляции чистым тоном одной частоты, а переходный характер сигналов при передаче речи и музыки не учитывается.

Если системы с асимметричными боковыми полосами оказались практически удовлетворительными для передачи речи и музыки, то это объясняется двумя причинами.

Во-первых, большая часть энергии модулирующих колебаний приходится на низкие частоты (ниже 2 кгц), так что большое число соответствующих боковых частот лежит в диапазоне, близком к несущей частоте. Значительная часть обеих боковых полос этого диапазона, будет передаваться, благодаря чему искажения будут уменьшаться. Во-вторых, человеческое ухо нечувствительно к фазовым искажениям, поэтому не обязательно точно сохранять форму огибающей. Важно, чтобы сохранялись относительные амплитуды составляющих.

При телевизионной передаче применяются модулирующие частоты вплоть до нулевой, вследствие чего боковые составляющие непосредственно граничат с несущей (рис. 94,в).

Телевизионные сигналы по своей природе являются неустановившимися, и форма их огибающей должна быть сохранена возможно точно, так как глаз, в отличие от уха, чувстви-

телен к изменениям формы колебаний, вызванных фазовыми или амплитудными искажениями.

Применение передачи с асимметричными боковыми полосами в телевидении и импульсной связи дает следующие преимущества: а) уменьшение ширины полосы канала; б) при той же ширине полосы канала увеличение модулирующей частоты (повышение четкости изображения); в) повышение усиления отдельных ступеней в усилителях приемника вследствие уменьшения ширины полосы (см. § 56); г) повышение отношения сигнала к шумам, если и передатчик и приемник работают с асимметричными боковыми полосами, так как вся мощность передатчика приходится на половину общей полосы, вследствие чего сила сигнала возрастает, а мощность шумов в приемнике уменьшается вдвое (см. § 58); д) уменьшение влияния внешних помех приему, благодаря уменьшению ширины полосы.

Так как в телевизионных каналах между несущей частотой и боковыми частотами нет зазора, применение полосовых фильтров позволяет подавить боковые частоты, ближе прилегающие к несущей, т. е. соответствующие низшим модулирующим частотам, в лучшем случае только частично.

Вследствие того, что характеристики полосового фильтра или фильтров отличаются от идеальных, боковые частоты модулированных колебаний, соответствующие низшим модулирующим частотам, будут искажаться по амплитуде и фазе, результатом чего явится искажение формы огибающей сигнала. На рис. 95,а представлен сигнал, несущая частота которого совпадает с верхней границей полосы пропускания фильтра. Одна боковая полоса сигнала пропускается полностью, вторая же частично подавляется.

Так как при этом искажаются обе боковые полосы, прилегающие к несущей, к тому же несимметрично, эти искажения являются по существу низкочастотными искажениями огибающей. Это явление может иметь серьезные последствия в телевизионном приеме и на него следует обращать особое внимание при анализе. Для каналов импульсной связи это явление не имеет особого значения.

Фактическое подавление части боковой полосы по одну сторону от несущей должно сказаться на высокочастотной части огибающей, что важно как в телевидении, так и в импульсной связи и других каналах, где требуется сохранить неизменным время нарастания сигнала.

Если бы несущая частота сигнала (рис. 95,а) совпадала со средней частотой характеристики полосового фильтра, то ее можно было бы привести к нулю, чтобы непосредственно

определить результирующие искажения огибающей (см. § 41), при условии, что характеристика симметрична относительно средней частоты. При этом фазовые искажения будут отсутствовать и искажения огибающей были бы такими же, как при прохождении через фильтр нижних частот, имеющий „эквивалентную частотную характеристику“. Эта эквивалент-

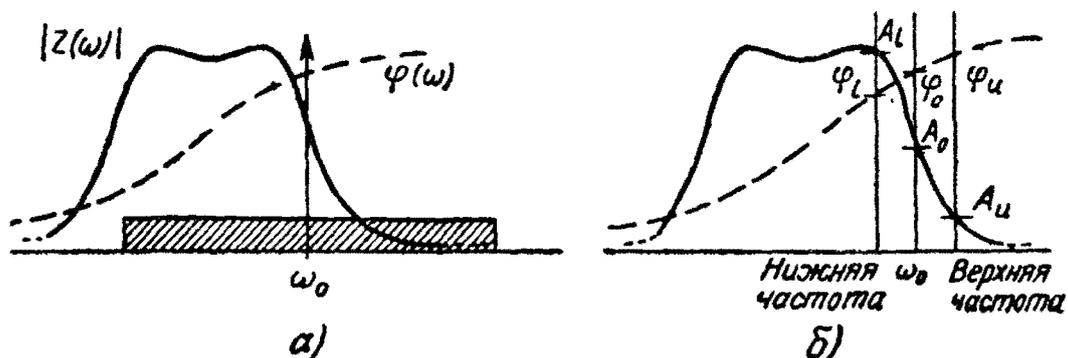


Рис. 95. Асимметричная передача боковых полос:
 а) телевизионный сигнал, б) простой синусоидальный сигнал.

ность уже иллюстрировалась рис. 64. Однако, когда несущая частота совпадает с границей полосы пропускания полосового фильтра, принцип эквивалентности непосредственно неприменим, и поэтому необходимо выяснить возможность распространения его и на такие случаи. Следующие страницы посвящены этому вопросу и на них описываются способы отыскания эквивалентных частотных характеристик, применимых к любой форме модулирующего сигнала и любой глубине модуляции.

60. Модуляция чистым тоном

Модуляция чисто синусоидальными колебаниями является простейшим случаем модуляции, при котором получаются только две боковые частоты, и который можно использовать для выяснения механизма возникновения искажений сигнала и огибающей при нарушении симметрии боковых полос. Этот вид модуляции рассматривается во всех опубликованных работах по однополосной передаче, но выводы, которые делаются в них, могут быть ошибочными, так как они применимы только при небольшой глубине модуляции. Более того, неразумно делать общие заключения по результатам, полученным при модуляции по синусоидальному закону, так как при этом, строго говоря, не передается никакая информация.

При анализе искажений, возникающих при однополосной передаче в случае модуляции по синусоидальному закону, необходимо иметь в виду сделанные замечания.

Если незатухающие колебания $E \cos \omega_0 t$ модулируются по амплитуде синусоидальными колебаниями $mE \cos \omega t$, то модулированные колебания будут иметь вид

$$e_1 = E(1 + m \cos \omega t) \cos \omega_0 t, \quad (271)$$

как уже было показано в §15. Пользуясь этим выражением, мы предполагаем, без ущерба для общности рассуждений, что начало отсчета времени совпадает с амплитудными значениями несущих колебаний и огибающей. Это позволяет не вводить в выражение фазовый угол, который ничего не изменяя, только усложняет все выражения. Выражение (271) разлагается на несущую, верхнюю боковую и нижнюю боковую частоты

$$e_1 = E \cos \omega_0 t + \frac{mE}{2} \cos (\omega_0 + \omega) t + \frac{mE}{2} \cos (\omega_0 - \omega) t. \quad (272)$$

Предположим, что эти колебания поданы на вход асимметричного канала, характеристика которого показана на рис. 95б. Напряжения, создаваемые несущей и боковыми частотами на выходе канала, изменятся по амплитуде в A_0 , A_u и A_l раз и по фазе на углы φ_0 , φ_u и φ_l^* , так что результирующие выходные колебания выразятся как

$$e = EA_0 \cos (\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mE}{2} A_u \cos [(\omega_0 + \omega) t + \varphi_u] + \frac{mE}{2} A_l \cos [(\omega_0 - \omega) t + \varphi_l]. \quad (273)$$

Модулированные колебания на входе и выходе канала могут быть представлены в виде суммы трех векторов. На рис. 20 была уже представлена векторная диаграмма для неискаженных модулированных колебаний, состоящая из трех векторов с угловыми скоростями ω_0 , $(\omega_0 + \omega)$ и $(\omega_0 - \omega)$, представляющих несущую, верхнюю боковую и нижнюю боковую частоты соответственно. Вектор несущей можно рассматривать как неподвижный, а векторы боковых частот — вращающимися в противоположных направлениях с угловыми скоростями $\pm \omega$ радиан/сек. На рис. 96 снова приведена эта диаграмма а) вместе с диаграммой колебаний на выходе асимметричного канала б). На этой последней диаграмме, в соответствии с уравнением (273), представлены три вектора с измененными длинами и фазовыми углами. Мгновенная амплитуда

* Величины A_u , A_l , φ_u и φ_l являются функциями модулирующей частоты и должны быть обозначены, как $A_u(\omega)$, $\varphi_u(\omega)$ и т. д., но для упрощения записи символ (ω) опускается и должен подразумеваться в дальнейшем.

Модулированных колебаний определяется суммой этих трех векторов. В случае неискаженных колебаний *а)* результирующий вектор располагается вдоль вектора несущей, так как векторы боковых частот всегда симметричны относительно

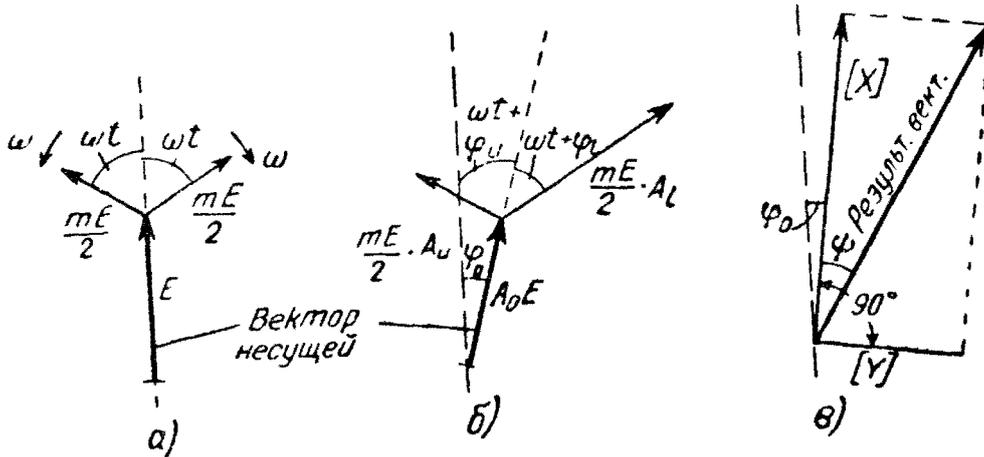


Рис. 96. Искажение боковых полос вследствие асимметрии характеристик канала. Векторные диаграммы:

а) неискаженных модулированных колебаний, *б)* колебаний на выходе асимметричного канала; *в)* составляющие результирующих колебаний.

него. Но в случае искаженных колебаний на выходе канала *б)* результирующий вектор не будет совпадать с вектором несущей.

Результирующий вектор можно разложить на две составляющие, одна из которых будет в фазе с вектором несущей, а вторая—в квадратуре с ним. Эти составляющие могут быть найдены из выражения (273), если его переписать в виде:

$$e = \left[A_0 + \frac{mA_l}{2} \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l) + \frac{mA_u}{2} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi_0) \right] \times \\ \times E \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \left[\frac{mA_l}{2} \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l) - \right. \\ \left. - \frac{mA_u}{2} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_0) \right] E \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (274)$$

Выражения, заключенные в квадратные скобки, представляют величину огибающей каждой из составляющих результирующих колебаний. Обозначая их через $[X]$ и $[Y]$ соответственно, можно представить уравнение (274) в виде

$$e = [X] E \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + [Y] E \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (275)$$

Эти составляющие представлены на рис. 96, *в)*. Результирующий вектор получается путем сложения этих составляющих:

$$e = E \sqrt{X^2 + Y^2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \arctg \frac{Y}{X}) = \\ = e_E \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Psi). \quad (276)$$

Таким образом, огибающая колебаний, искаженных вследствие асимметрии боковых составляющих, равна

$$e_E = E\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (277)$$

а фазовая модуляция несущей определяется углом Ψ , равным

$$\Psi = \arctg \frac{Y}{X}. \quad (278)$$

При вращении векторов несущей и боковых частот (рис. 96,б) с соответствующими угловыми скоростями, проекции их $[X]$ и $[Y]$ на направление вектора несущей и перпендикулярное к нему будут изменяться по длине. Результирующе-

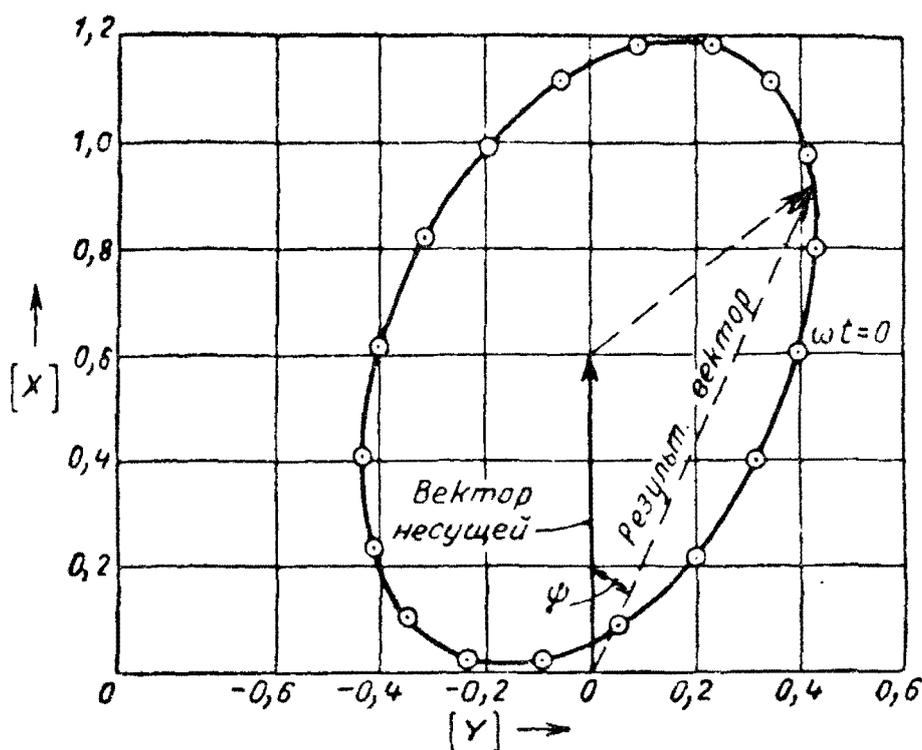


Рис. 97. Геометрическое место концов результирующего вектора при модуляции по синусоидальному закону.

щий вектор, равный геометрической сумме этих проекций, будет представлять искаженные по амплитуде и фазе выходные колебания. Интересно проследить, как изменяются амплитуда и фаза в конкретном случае. Это легче всего сделать путем построения геометрического места концов результирующего вектора за полный период огибающей. Предположим,

для примера, что величина A_l , φ_l , A_u , φ_u , и т. д. (рис. 95,б) имеют следующие числовые значения:

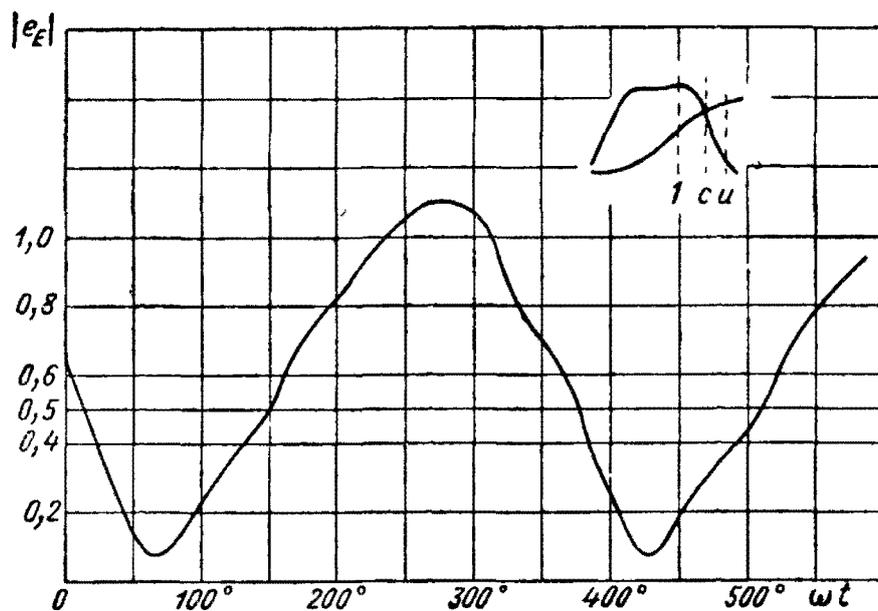
Несущая: $A_0 = 0,6$, $\varphi_0 = 120^\circ$;

Верхняя боковая: $A_u = 0,25$, $\varphi_u = 170^\circ$;

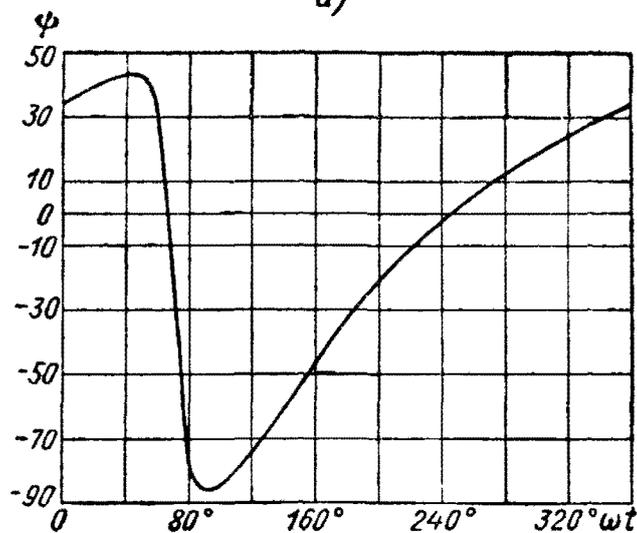
Нижняя боковая: $A_l = 1,0$, $\varphi_l = 20^\circ$

(279)

и что глубина модуляции равна 100%, т. е. $m = 1$.



а)



б)

Рис. 98. Модуляция по синусоидальному закону при асимметричной передаче боковых полос (частичном подавлении одной полосы):

а) искажения огибающей; б) фазовая модуляция несущей частоты.

Подстановка этих значений в (274) дает величины $[X]$ и $[Y]$, представленные на рис. 97, из которого видно, что геомет-

рическое место концов результирующего вектора в случае модуляции чисто синусоидальным сигналом будет иметь форму эллипса. Точки, обведенные кружком, соответствуют положению результирующего вектора через равные промежутки $\omega t = 20^\circ$.

По кривой геометрического места точек могут быть определены амплитуда огибающей e_E (длина результирующего вектора) и угол Ψ фазовой модуляции несущей. На рис. 98 представлены графики искаженной огибающей *a*) и фазовой модуляции несущей *b*) за один период огибающей.

Для обычных каналов связи важно знать форму огибающей и по этому рисунку можно судить о степени искажения гармоник, получающегося из-за асимметрии боковых полос.

Развернутые выражения для огибающей и фазовой модуляции несущей, в общем виде получаются при подстановке значений $[X]$ и $[Y]$ из (274) в (277) и (278)

$$e_E = E \left\{ A_0^2 + \frac{m^2}{4} [A_u^2 + A_l^2 + 2A_u A_l \cos(2\omega t + \varphi_u - \varphi_l)] + \right. \\ \left. + mA_0 [A_u \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi_0) + A_l \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l)] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (280)$$

и

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{\frac{mA_l}{2} \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l) - \frac{mA_u}{2} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_0)}{A_0 + \frac{mA_l}{2} \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l) + \frac{mA_u}{2} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi_0)}. \quad (281)$$

При применении уравнения (280) пренебрежение членом при m^2 допустимо только при небольшой глубине модуляции и равносильно полному пренебрежению искажениями формы огибающей. Это обстоятельство приводит к неверному выводу о том, что результатом асимметрии боковых полос является только изменение глубины модуляции. Если рассматривать только составляющую $[X]$ искаженных колебаний в качестве результирующего выходного сигнала и пренебрегать ортогональной составляющей $[Y]$, это также приводит к тому, что искажения формы огибающей не учитываются.

61. Однополосная передача при полном подавлении одной из боковых полос

Из векторных диаграмм (рис. 96) можно видеть, что составляющая $[Y]$, вызывающая искажения огибающей и фазовую модуляцию несущей, возрастает по мере того, как амплитуды боковых частот A_u и A_l все более отличаются по

величине. В предельном случае, когда одна боковая подавляется полностью (как в собственно однополосных системах), получаются максимальные искажения. Пусть полностью подавляется верхняя боковая, так что $A_u = 0$.

Тогда огибающая согласно уравнения (280) будет

$$e_E = E \left[A_0^2 + \frac{m^2 A_1^2}{4} + m A_0 A_1 \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (282)$$

Векторная диаграмма для однополосной передачи представлена на рис. 99,а. Длина результирующего вектора представляет огибающую e_E , а угол ψ между этим вектором и вектором несущей является мерой фазовой модуляции несущей.

Геометрическим местом концов результирующего вектора будет в этом случае окружность радиусом $m A_1 / 2$. На рис. 99,б

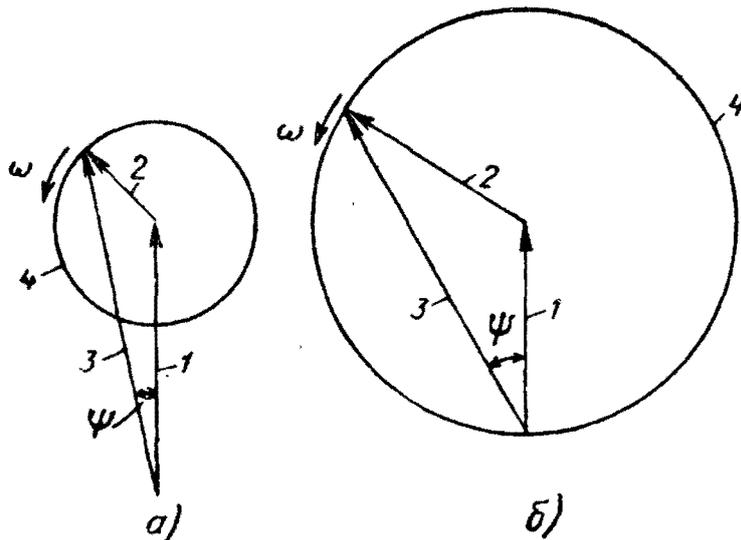


Рис. 99. Векторные диаграммы при полном подавлении одной боковой полосы:

1 — несущая; 2 — нижняя боковая частота; 3 — результирующий вектор; 4 — геометрическое место концов результирующего вектора.

а) для однополосной передачи; б) для равных по величине боковой и несущей.

приведена векторная диаграмма для случая, когда боковая и несущая равны по величине.

Ясно, что форма этой векторной диаграммы, а следовательно и результирующих искаженных колебаний, зависит от отношения величин A_0 и A_1 , входящих в выражение для e_E . Обозначив это отношение, как

$$\eta = A_1 / A_0 \quad (283)$$

и подставив его в (282), получим

$$e_E = EA_0 \left[1 + \frac{m^2 \eta^2}{4} + m \eta \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (284)$$

На рис. 100,а построены по этому уравнению графики огибающей для различных значений $m\eta$. На рис. 100,б приведены графики для угла Ψ фазовой модуляции, полученные из уравнения (281) при подстановке в него $A_u = 0$ и $\eta = A_1/A_0$

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{m \eta \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1)}{2 + m \eta \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1)}. \quad (285)$$

Фазовый угол $(\varphi_0 - \varphi_1)$ на этом рисунке не учтен. Из графиков можно видеть, как увеличивается искажение огибающей, имевшей первоначально форму синусоидальной кривой, с увеличением глубины модуляции (m) или с ростом амплитуды передаваемой боковой полосы относительно несущей (η). В предельном случае при $m\eta = 2$ векторы боковой и несущей равны по длине (векторная диаграмма на рис. 99,б) и эффективная модуляция результирующих колебаний получается равной 100%. Огибающая имеет при этом форму кривой при двухполупериодном выпрямлении синусоиды.

Модуляция колебаний является, конечно, результатом биений двух синусоидальных колебаний с различными частотами — несущей и боковой. Результирующие колебания, получающиеся при сложении двух частот, оказываются модулированными по фазе, тогда как чисто амплитудно-модулированные колебания содержат три частоты и не модулированы по фазе. Из графиков рис. 100,б для одного полного периода огибающей видно, что фазовая модуляция увеличивается с ростом $m\eta$. Угол Ψ равен нулю при $\omega t = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ \dots$ и т. д. в точках, соответствующих максимумам и минимумам огибающей. Между этими точками он изменяется по величине. Предельный случай при $m\eta = 2$ представляет особый интерес.

Из уравнения (284) следует, что огибающая имеет минимальные значения, когда $\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1) = -1$, и равна

$$(e_E)_{\min} = EA_0 (1 - m\eta/2), \quad (286)$$

через равные интервалы $\omega t = 2\pi$ вдоль оси времени. Коэффициент модуляции m может иметь значения от 0 до 1, а η — любые. Если считать амплитуду несущей A_0 постоянной, а A_1 — изменяющейся, то из векторной диаграммы (рис. 99) и кривой огибающей (рис. 100,а) можно видеть, что при $m\eta < 2$ минимальные значения огибающей никогда не доходят до нулевого значения. При $m\eta = 2$ получается 100%

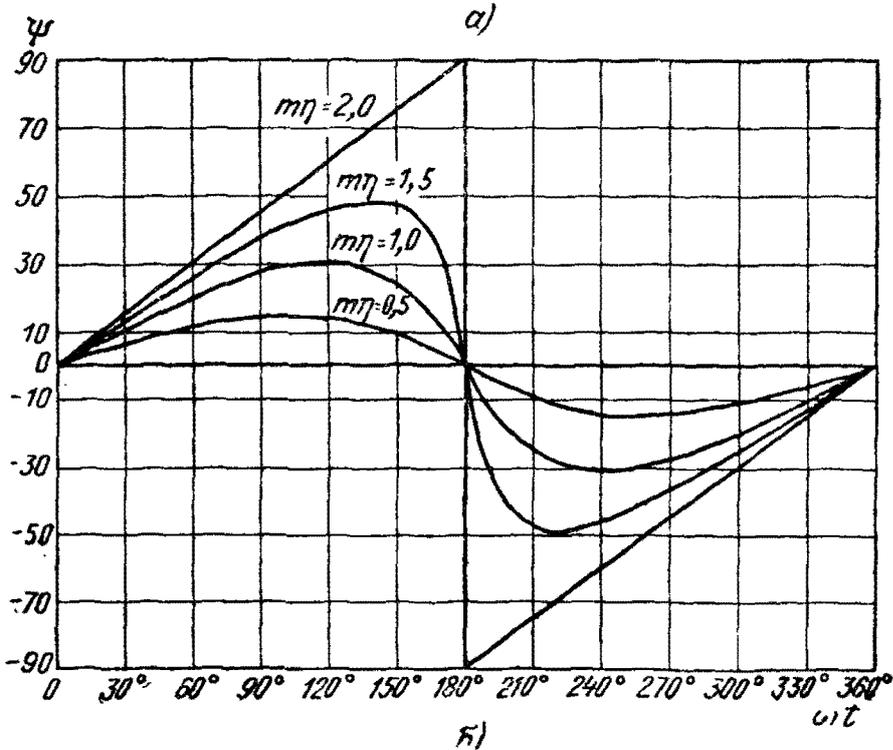
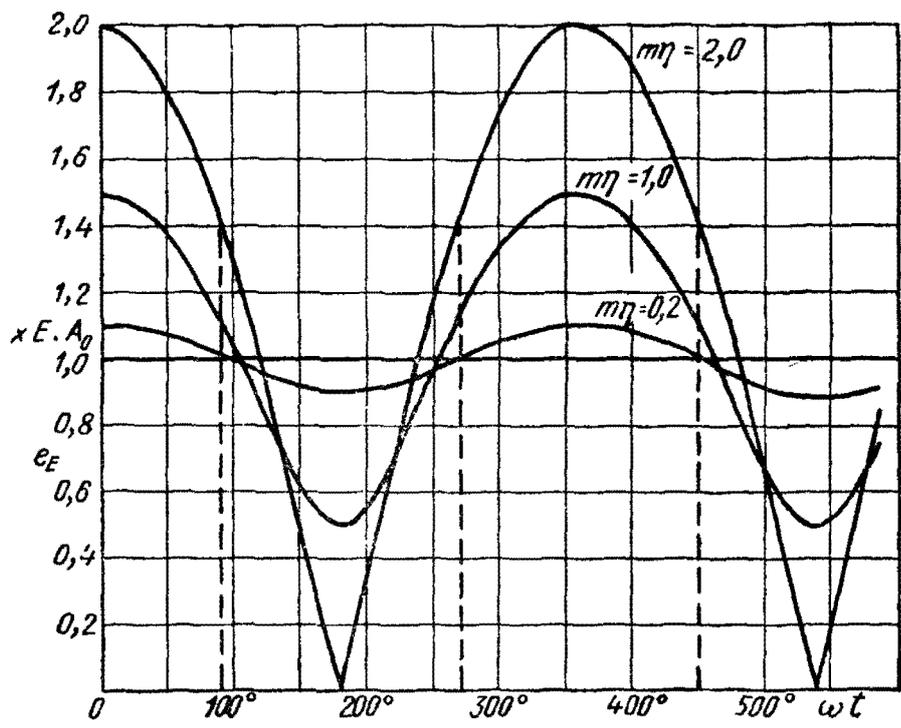


Рис. 100. Модуляция по синусоидальному закону при полном подавлении одной боковой полосы:
 а) искажения огибающей; б) фазовая модуляция несущей частоты.

модуляции искаженных колебаний, а при $m\eta > 2$ — перемодуляция.

Влияние перемодуляции легче всего проследить по векторной диаграмме рис. 99. Когда вектор боковой частоты $mA_1/2$ изменяется по длине, приближаясь к длине вектора несущей A_0 , результирующий вектор отличается по фазе от вектора несущей на угол Ψ , который возрастает с увеличением A_1 . При $mA_1/2 = A_0$ векторы имеют одинаковую длину, и угол Ψ изменяется в пределах $\pm \pi/2$. Если $mA_1/2$ становится больше, чем A_0 , радиус геометрического места концов результирующего вектора становится больше, чем вектор несущей, и за каждый период огибающей получается один лишний период результирующих колебаний. Это значит, что фазовая модуляция вызывает внезапное кажущееся изменение частоты результирующих колебаний, что можно видеть из рис. 101, на котором показаны минимумы огибающей и изменения их по мере того, как амплитуда боковой частоты приближается по величине к несущей и затем начинает превосходить ее.

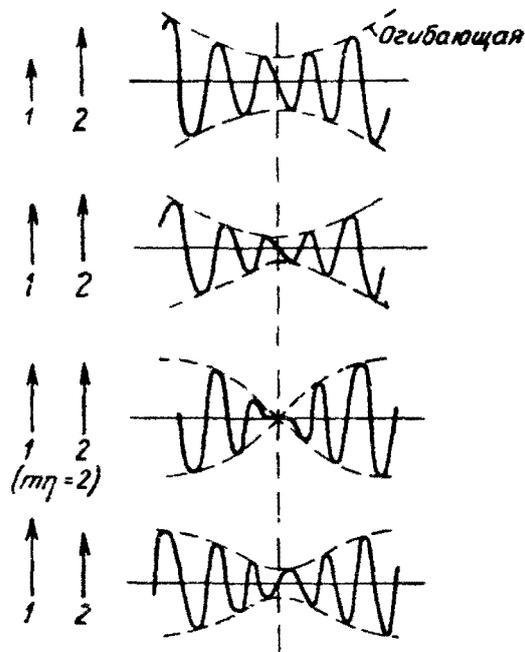


Рис. 101. Кажущееся изменение несущей частоты:
1 — боковая полоса; 2 — несущая частота.

В этом частном случае модуляции по синусоидальному закону искажения, получающиеся при подавлении одной боковой, могут быть полностью скорректированы путем применения квадратичного детектора. В этом можно убедиться, если возвести в квадрат выражение (284) для огибающей. Кажущаяся глубина модуляции изменяется, но детектируемый сигнал остается теоретически синусоидальным. Однако этот способ коррекции, как мы увидим далее, не может быть применен при других видах модулирующих сигналов, поэтому он не представляет большого практического интереса.

Другой метод уменьшения искажений при однополосной (а также асимметричной) передаче, применяемый в системах телефонирования на несущей частоте, состоит в искусственном увеличении амплитуды несущей в приемнике, вследствие чего глубина модуляции эффективно уменьшается и составляющая $[Y]$ получается меньше, чем она была бы в дей-

ствительности (см. векторную диаграмму на рис. 96). Таким образом фазовая модуляция несущей и искажения огибающей уменьшаются.

Трудность этого способа заключается в правильном фазировании восстанавливаемой составляющей, так как она должна быть строго в фазе с несущей в передатчике, чтобы сохранились правильные фазовые соотношения с боковой полосой. Это иногда осуществляется за счет полного отфильтровывания несущей на передающем конце канала и передачи ее по особому узкополосному контрольному каналу.

62. Эквивалентные модуляционные характеристики

Прежде чем переходить к более детальному рассмотрению вопроса о прохождении кратковременных сигналов по каналам с асимметричными боковыми полосами, следует посмотреть, нельзя ли получить семейство эквивалентных модуляционных характеристик, по которым можно было бы непосредственно определить искажения огибающей.

В § 59 уже упоминалось, что несущую частоту нельзя привести к нулю для получения эквивалентной модуляционной характеристики, так как этот принцип применим только в тех случаях, когда характеристики канала симметричны относительно несущей частоты (см. § 41). Более того, в последнем параграфе было показано, что искажения огибающей зависят от глубины модуляции, поэтому эквивалентные модуляционные характеристики (если они существуют) должны отражать изменение искажений результирующих колебаний с изменением амплитуды огибающей колебаний, подаваемых на вход канала. Иными словами, в эти характеристики должны входить нелинейные соотношения.

Однако можно найти очень простой способ распространения принципа приведения несущей (средней) частоты к нулю на каналы с асимметричными характеристиками. В дальнейшем будет показано, что требуется не одна, а две пары характеристик: одна — для составляющей $[X]$ и вторая — для составляющей $[Y]$. Эти составляющие искаженных колебаний можно будет определять, рассматривая воздействие огибающей поочередно на каждую пару характеристик.

В случае модуляции по синусоидальному закону выражения для составляющих $[X]$ и $[Y]$ даются в квадратных скобках в уравнении (274). Они содержат величины, относящиеся к огибающей (например, m и ω), и к характеристике канала (например, A_0 , A_u , φ_u ... и т. д.). Эти две категории

величин могут быть разделены, если развернуть выражения для $[X]$ и $[Y]$. Например, можно написать

$$\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l) = \cos \omega t \cdot \cos(\varphi_0 - \varphi_l) - \sin \omega t \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi_l) \quad (287)$$

и т. д. Тогда выражение для $[X]$ принимает вид

$$[X] = A_0 \left\{ \left[\frac{A_l}{2A_0} \cos(\varphi_0 - \varphi_l) + \frac{A_u}{2A_0} \cos(\varphi_u - \varphi_0) \right] \cdot m \cos \omega t - \right. \\ \left. - \left[\frac{A_l}{2A_0} \sin(\varphi_0 - \varphi_l) + \frac{A_u}{2A_0} \sin(\varphi_u - \varphi_0) \right] m \sin \omega t \right\} \quad (288)$$

и выражение для $[Y]$

$$[Y] = A_0 \left\{ \left[\frac{A_l}{2A_0} \sin(\varphi_0 - \varphi_l) - \frac{A_u}{2A_0} \sin(\varphi_u - \varphi_0) \right] m \cos \omega t + \right. \\ \left. + \left[\frac{A_l}{2A_0} \cos(\varphi_0 - \varphi_l) - \frac{A_u}{2A_0} \cos(\varphi_u - \varphi_0) \right] m \sin \omega t \right\}. \quad (289)$$

Следует отметить, что постоянная A_0 , относящаяся к несущей (уравнение 274), выпущена в уравнении (288) для $[X]$, так как при $\omega \rightarrow 0$ $A_l = A_u = A_0$ и

$$\cos(\varphi_0 - \varphi_l) = \cos(\varphi_u - \varphi_0) = 1.$$

Сравнение полученных выражений для $[X]$ и $[Y]$ с первоначальным выражением для огибающей (271) показывает, что каждая из этих составляющих является искаженной определенным образом огибающей. Так, в выражение для $[X]$ входит модулирующая функция ($m \cos \omega t$), но кроме того оно содержит и ($m \sin \omega t$). Аналогично, составляющая $[Y]$ также содержит ($m \cos \omega t$) и ($m \sin \omega t$).

Каждую составляющую можно рассматривать как результат воздействия огибающей на две комплексные проводимости. Обозначим эти проводимости как $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$, соответственно, а полную проводимость канала с асимметричными боковыми полосами через $Y(\omega)$ (эта проводимость представлена характеристиками рис. 95). Если, также для упрощения, обозначить огибающую через $F(\omega t)$, то выражение (271) для модулированных колебаний, подаваемых на вход канала, примет вид

$$e_1 = E \cdot F(\omega t) \cdot \cos \omega_0 t, \quad (290)$$

а выражение (275) для сигнала на выходе канала

$$e_1 Y(\omega) = EA_0 F(\omega t) \cdot Y_x(\omega) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ + EA_0 F(\omega t) \cdot Y_y(\omega) \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (291)$$

Из уравнений (288) и (289) мы видели, что проводимости $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ должны быть комплексными. Пусть

$$\left. \begin{aligned} Y_x(\omega) &= g_x(\omega) + jb_x(\omega) \\ Y_y(\omega) &= g_y(\omega) - jb_y(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (292)$$

Тогда результирующее колебание будет равно

$$\begin{aligned} e_1 Y(\omega) &= EA_0 F(\omega t) [g_x(\omega) + jb_x(\omega)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ EA_0 F(\omega t) [g_y(\omega) - jb_y(\omega)] \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (293)$$

Выражения для $g_x(\omega)$, $b_x(\omega)$, $g_y(\omega)$ и $b_y(\omega)$ содержатся в квадратных скобках в уравнениях (288) и (289)*

$$\left. \begin{aligned} g_x(\omega) &= \frac{A_l}{2A_0} \cos(\varphi_0 - \varphi_l) + \frac{A_u}{2A_0} \cos(\varphi_u - \varphi_0) \\ b_x(\omega) &= \frac{A_l}{2A_0} \sin(\varphi_0 - \varphi_l) + \frac{A_u}{2A_0} \sin(\varphi_u - \varphi_0) \\ g_y(\omega) &= \frac{A_l}{2A_0} \sin(\varphi_0 - \varphi_l) - \frac{A_u}{2A_0} \sin(\varphi_u - \varphi_0) \\ b_y(\omega) &= \frac{A_l}{2A_0} \cos(\varphi_0 - \varphi_l) - \frac{A_u}{2A_0} \cos(\varphi_u - \varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

Комплексные проводимости, заключенные в квадратные скобки в выражении (293), и являются эквивалентными модуляционными характеристиками, определяемыми двумя уравнениями. Они являются теми проводимостями, на которые поочередно воздействует огибающая $F(\omega t)$ в результате чего могут быть вычислены составляющие $[X]$ и $[Y]$, дающие при геометрическом сложении согласно уравнения (277) огибающую искаженных колебаний.

Сравним теперь форму этих эквивалентных характеристик с характеристиками рис. 95, которыми мы пользовались первоначально. Характеристики представлены снова на рис. 102: а) характеристика для случая симметричных боковых полос (несущая совпадает со средней частотой полосы канала) и эквивалентная ей модуляционная характеристика, полученная для этого простого случая приведением несущей частоты к нулевой частоте. Эквивалентная характеристика является составляющей $Y_x(\omega)$, так как $Y_y(\omega) = 0$ (в чем можно убедиться при подстановке $A_l = A_u$ и $\varphi_0 - \varphi_l = \varphi_u - \varphi_0$); б) характеристика для случая асимметричных боковых полос

* См. примечание к выражению (273) на стр. 237.

вместе с двумя эквивалентными характеристиками $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$. Характеристики представлены в виде графиков амплитуды и фазы, тогда как в уравнениях (294) даются их дей-

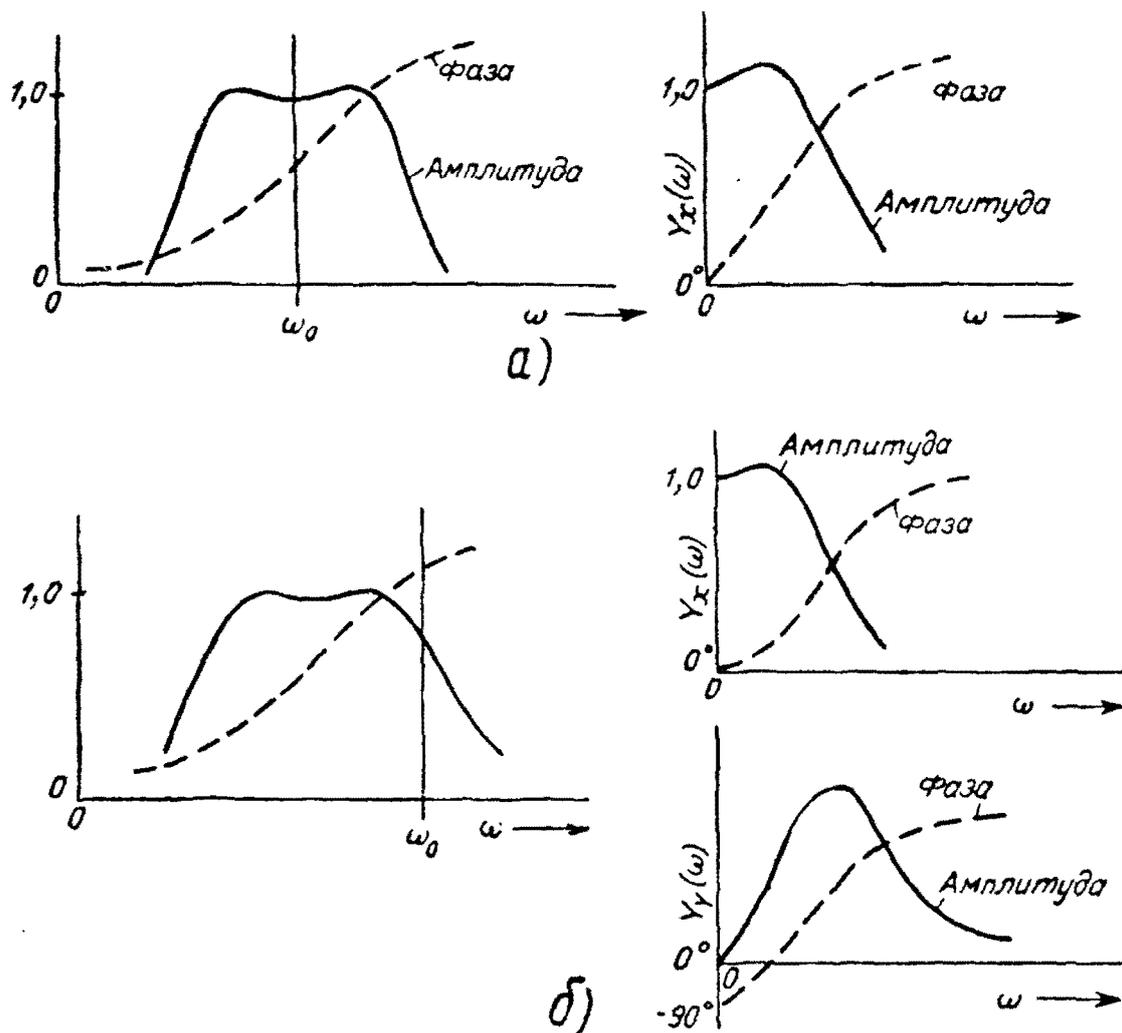


Рис 102. Эквивалентные модуляционные характеристики:
 а) симметричная передача боковых полос; б) асимметричная передача боковых полос.

ствительные и мнимые части. Переход от одной формы к другой совершается просто:

$$Y_x(\omega) \left\{ \begin{array}{l} \text{Модуль: } \sqrt{g_x^2(\omega) + b_x^2(\omega)} \\ \text{Фазовый угол: } \operatorname{arctg} \frac{b_x(\omega)}{g_x(\omega)} \end{array} \right\} \quad (295)$$

$$Y_y(\omega) \left\{ \begin{array}{l} \text{Модуль: } \sqrt{g_y^2(\omega) + b_y^2(\omega)} \\ \text{Фазовый угол: } -\operatorname{arctg} \frac{b_y(\omega)}{g_y(\omega)} \end{array} \right\}.$$

Необходимо обратить внимание на следующую особенность этих характеристик при $\omega = 0$ [см. уравнения (292) и (294)]

$$\left. \begin{array}{l} \text{Модуль } |Y_x(\omega)| = 1 \\ \text{Фазовый угол } Y_x(\omega) = 0 \\ \text{Модуль } |Y_y(\omega)| = 0 \\ \text{Фазовый угол } |Y_y(\omega)| = -90^\circ \end{array} \right\} \quad (296)$$

так как, если частота модуляции $\omega = 0$, то $A_i = A_u = A_0$ и $\varphi_i = \varphi_u = \varphi_0$.

Фазовый сдвиг -90° составляющей $Y_y(\omega)$ при нулевой частоте показан на рис. 102,б.

Хотя уравнения эквивалентных модуляционных характеристик были получены для чисто синусоидальной огибающей, позднее (в § 65) будет показано, что они применимы к огибающей любой формы.

63. Расстроенный резонансный усилитель

В качестве примера канала с асимметричными боковыми полосами рассмотрим усилительный каскад, состоящий из четырехэлектродной лампы, нагруженной резонансным контуром, применяющийся, например, в качестве предварительного усилителя в приемнике. Контур может оказаться расстроенным относительно несущей частоты входного сигнала. Можно вычислить эквивалентные модуляционные характеристики $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ для различной степени расстройки.

На рис. 103 приведена схема усилительного каскада и его характеристики, вычерченные в относительном масштабе. Мы уже рассматривали характеристики настроенного контура в третьей главе, но там был взят контур с очень низким значением Q , чтобы показать присущую этим характеристикам асимметрию. Кривые на рис. 103 применимы с точностью до 1% к контурам с довольно высокой добротностью Q (от 25 до 300), используемым в усилителях в. ч. Принято, что Q остается постоянной величиной в пределах полосы пропускания контура. Эти характеристики вполне симметричны относительно резонансной частоты, так что усилитель не дает асимметричных искажений боковых полос при правильной настройке.

Если S — крутизна характеристики лампы (тетрода), то анодный ток ее определится как $i_a = Se_1$ и передаточная характеристика такого каскада может быть выражена в виде

отношения выходного напряжения к входному, т. е. e_2/e_1 . Выходное напряжение $e_2 = i_a Z(\omega)$, где $Z(\omega)$ — полное сопротивление анодного контура. Таким образом, передаточная характеристика равна

$$\frac{e_2}{e_1} = SZ(\omega). \quad (297)$$

Кривые модуля и фазового угла передаточной характеристики представлены на рис. 103 в функции от $\alpha = Q \frac{\omega}{\omega_0}$, где ω_0 — резонансная частота контура.

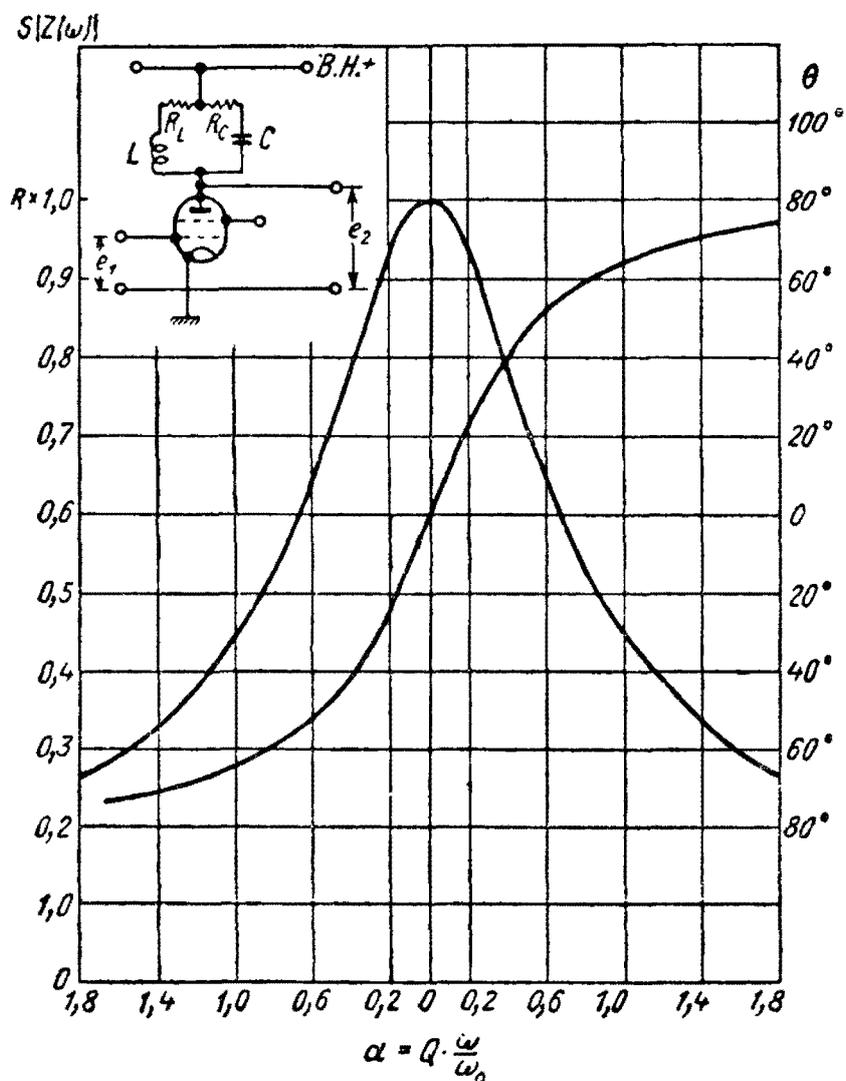


Рис. 103. Частотные характеристики резонансного усилителя.

Рассмотрим теперь случай, когда каскад расстроен относительно несущей частоты сигнала. Пусть α_c является тем частным значением α , на которое настроена несущая. Значения эквивалентных характеристик $Y_x(\omega)$ и $Y(\omega)$ вычислены

по уравнениям (294) и (295) и характеристикам каскада для несущих частот ω_0 , соответствующих $\alpha_c = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8$ и $1,0$ и представлены на рис. 104,а. При $\alpha_c = 0$ характери-

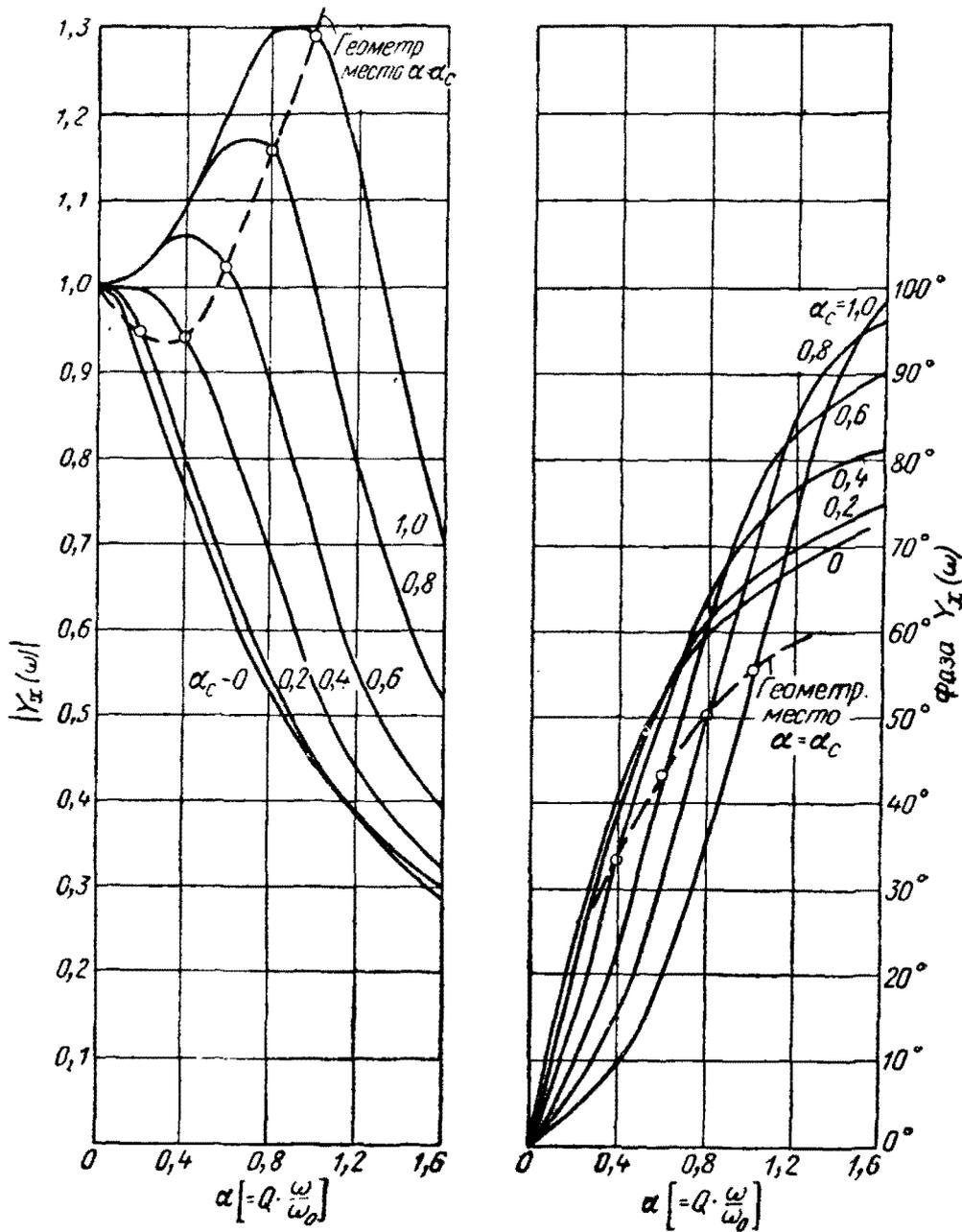


Рис. 104а. Амплитуда и фазовый угол составляющей $Y_x(\omega)$ расстроенного резонансного усилителя.

стика $Y_x(\omega)$, конечно, идентична с основной характеристикой рис. 103, так как это соответствует отсутствию расстройки. Значения $Y_y(\omega)$ для этого случая равны нулю.

Из рис. 104 видно, что с увеличением расстройки (с возрастанием α_c) величина проводимости $Y_y(\omega)$ становится все

более заметной, особенно при более высоких частотах модуляции ω . С возрастанием расстройки на кривых модулей $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ появляются максимумы, увеличивающиеся по значению и сдвигающиеся в сторону более высоких частот по мере возрастания α_c . Это значит, что искажения огибающей, определенной по этим проводимостям будут проявляться

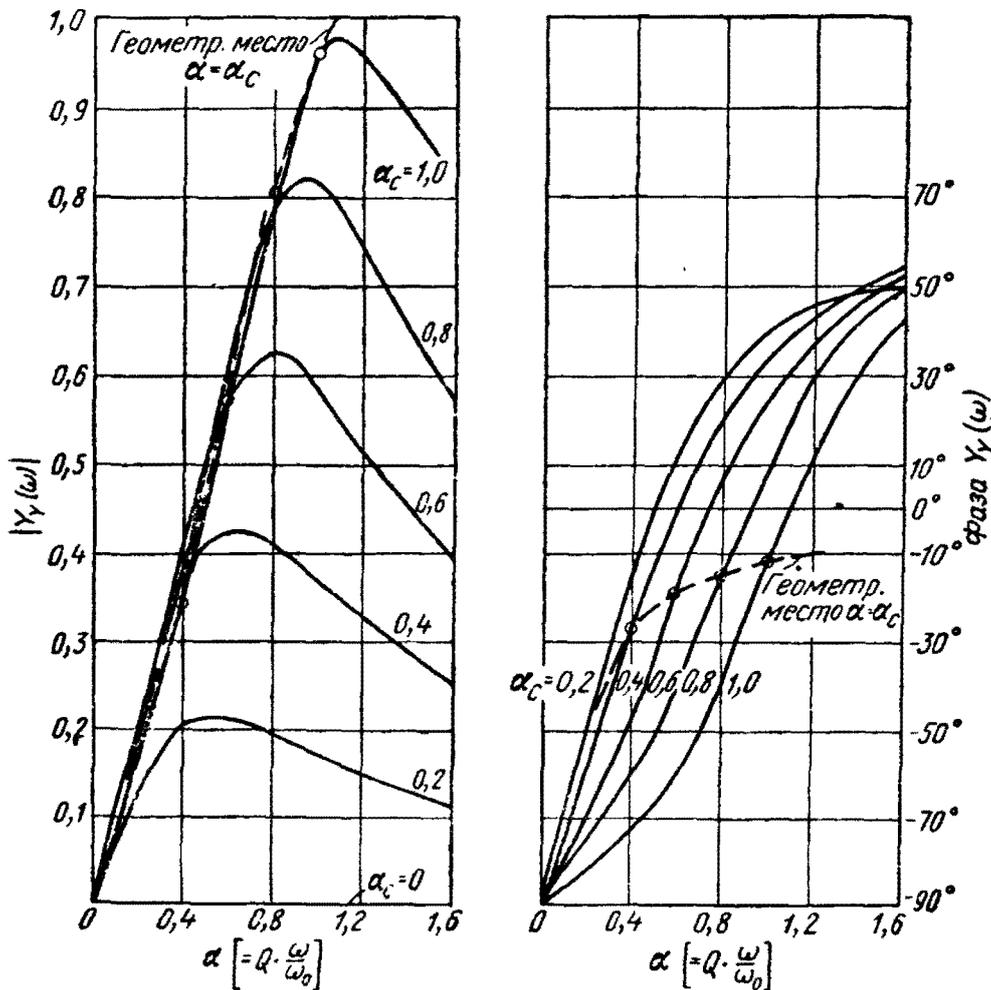


Рис. 104б. Амплитуда и фазовый угол составляющей $Y_y(\omega)$ расстроенного резонансного усилителя.

в виде непропорционального увеличения отдельных частотных составляющих, что может повести к появлению выбросов на огибающей.

Величина и длительность выбросов будут зависеть от формы эквивалентных характеристик. При рассмотрении частотной характеристики рис. 103 можно сделать на первый взгляд заключение, что если несущая частота колебаний будет отличаться от резонансной частоты контура на величину, определяемую значением α_c , то в форме огибающей выходных колебаний получится максимум на этой частоте

или около нее, так как боковые частоты получают большее усиление именно на этой частоте. В действительности, максимальные значения $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ получаются не точно на частотах, соответствующих α_c , а несколько смещаются относительно них. Это смещение максимума наглядно видно из рис. 104,б, где пунктирными линиями показаны геометрические места точек $\alpha = \alpha_c$.

Как видно из рисунка, фазовые характеристики $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ нелинейны. Это значит, что составляющие $[X]$ и $[Y]$ огибающей будут искажены по фазе, что приведет к асимметрии их формы (см. § 39). Далее, крутизна фазовых характеристик уменьшается с возрастанием α для малых значений α_c и увеличивается с возрастанием α для более высоких α_c (т. е. при большей расстройке). Таким образом, по мере того, как несущая частота сигнала и резонансная частота контура все более расходятся высокочастотные составляющие огибающей будут все более запаздывать относительно низкочастотных (см. § 40, о фазовом запаздывании). Влияние этого запаздывания на прямоугольный импульс (или элемент изображения) проявляется в виде выброса сейчас же по окончании основного сигнала.

Относительное увеличение запаздывания высокочастотных составляющих модулирующего сигнала при больших расстройках типично не только для резонансных усилителей, но и для любых каналов с аналогичными фазовыми характеристиками, т. е. имеющими конечную крутизну и достаточно линейными в пределах полосы пропускания, а затем загибающимися и идущими почти горизонтально в районе частоты среза.

64. Модуляция прямоугольной огибающей

До сих пор рассматривались колебания, модулированные чисто синусоидальным тоном. Этот простейший случай позволяет наглядно показать, как возникают искажения в однополосных каналах или в каналах с асимметричными боковыми полосами, и как они зависят от глубины модуляции, а также выяснить зависимость между результирующими искажениями огибающей и фазовой модуляции несущей. Он позволяет также применить векторные диаграммы для исследования вопроса, и путем разложения вектора результирующих колебаний на ортогональные составляющие $[X]$ и $[Y]$ найти комплексные проводимости $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$, позволяющие определить искажения в каждом конкретном случае методом приведения несущей к нулевой частоте.

Модуляция по чисто синусоидальному закону представляет ограниченный интерес, поэтому необходимо распространить полученные результаты на случаи модуляции по другим законам. Наибольший интерес, повидимому, представляет модуляция по закону прямоугольной или скачкообразной огибающей, поэтому следует детально рассмотреть вопрос об искажениях формы этих огибающих. Такие сигналы можно рассматривать как предельные „элементы изображения“ в телевидении. Результаты, которые будут получены при этом, позволят судить о том, каких искажений можно ожидать при передаче прямоугольных импульсов.

Изучим подробно искажения огибающей в виде прямоугольного периодического колебания, разлагаемого в ряд Фурье. Выводы, сделанные для этого случая, будут в первом приближении верны, по крайней мере качественно, для скачкообразного сигнала и одиночного прямоугольного импульса, хотя последние представляются непрерывными спектрами.

В § 37 была рассмотрена возможность аппроксимации непрерывного спектра гармоническим рядом, а в § 35 был вычислен ряд для прямоугольной кривой, представленной на рис. 25.

Если глубина модуляции незатухающих колебаний с амплитудой E равна $100 m\%$, то амплитуда огибающей будет $\pm mE$. Модулированные колебания будут иметь вид

$$e_1 = E \left(1 + \frac{4m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi t}{T_0} \right) \cos \omega_0 t, \quad (298)$$

где n — нечетное (только нечетные гармоники), T_0 — период прямоугольной огибающей. Эти колебания можно представить в виде суммы составляющих несущей и боковых частот:

$$e_1 = E \cos \omega_0 t + E \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\omega_0 + \frac{2n\pi}{T_0} \right) t - \\ - E \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left(\omega_0 - \frac{2n\pi}{T_0} \right) t. \quad (299)$$

Пусть эти колебания подводятся к полосовому фильтру асимметрично так, что несущая частота совпадает с граничной частотой полосы пропускания (рис. 95). Пусть опять A_u, A_l, φ_u и φ_l представляют модули и фазовые углы передаточной характеристики фильтра для различных боковых составляющих, являющихся функциями n .

Колебания на выходных зажимах фильтра будут иметь вид:

$$e = EA_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + E \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_u}{n} \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{2n\pi}{T_0} \right) t + \varphi_u \right] - E \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_l}{n} \sin \left[\left(\omega_0 - \frac{2n\pi}{T_0} \right) t + \varphi_l \right]. \quad (300)$$

Так же, как и в случае модуляции чисто синусоидальным тоном, мы можем представить модулированные колебания на входе и выходе фильтра векторными диаграммами. До фильтра вектор несущей можно считать неподвижным. Каждая составляющая модулирующих колебаний с частотой $2n\pi/T_0$ даст две

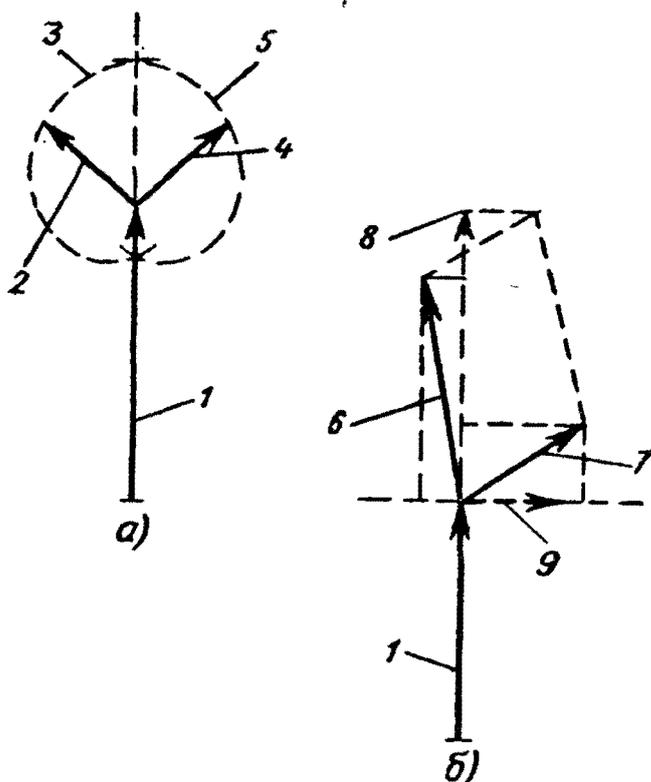


Рис. 105. Векторные диаграммы сложной формы огибающей в бесконечном числе боковых частот (а) и их результирующие (б):

1 — несущая; 2 — нижняя боковая полоса; 3 — геометрическое место концов вектора нижней боковой полосы; 4 — верхняя боковая полоса; 5 — геометрическое место концов вектора верхней боковой полосы; 6 — результирующий вектор нижней боковой полосы; 7 — результирующий вектор верхней боковой полосы; 8 — вектор $[X]$ составляющей, находящейся в фазе с несущей; 9 — вектор $[Y]$ составляющей, находящейся в квадратуре с несущей.

боковых частоты, векторы которых расположены симметрично относительно вектора несущей, но вращаются в противоположных направлениях. Если включить все модулирующие частоты, то получится доходящее в предельном случае до бесконечности число пар векторов боковых частот (рис. 105, а).

Сумма всех векторов боковых частот в любой момент времени даст результирующую, находящуюся в фазе с вектором несущей и представляющую амплитуду огибающей в данный момент, а сумма составляющих, находящихся в квадратуре с несущей, должна быть равна нулю.

Результирующая всех векторов верхних боковых частот является вектором с изменяющимися длиной и угловой скоростью. Конец его описывает некоторую кривую, форма которой зависит от формы огибающей. Результирующая векторов нижних боковых частот является зеркальным изображением результирующей векторов верхних боковых частот.

Когда эти колебания проходят через асимметричный фильтр и боковые полосы претерпевают амплитудные и фазовые искажения, результирующие верхних и нижних боковых частот уже не будут располагаться симметрично относительно векторов несущей, и составляющая $[Y]$, находящаяся в квадратуре с вектором несущей, уже не будет равна нулю (рис. 105,б). Составляющая $[Y]$ вносит искажения огибающей и вызывает фазовую модуляцию несущей, как это уже было показано для случая модуляции по синусоидальному закону.

Составляющие $[X]$ и $[Y]$, находящиеся в фазе и квадратуре с вектором несущей, могут быть найдены из уравнения (300), если его представить в виде:

$$\begin{aligned}
 e = & \left\{ A_0 + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_u}{n} \sin \left(\frac{2n\pi t}{T_0} + \varphi_u - \varphi_0 \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{A_l}{n} \sin \left(\frac{2n\pi t}{T_0} + \varphi_0 - \varphi_l \right) \right] \right\} \cdot E \cos (\omega_0 t + \varphi_0) + \\
 & + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_u}{n} \cos \left(\frac{2n\pi t}{T_0} + \varphi_u - \varphi_0 \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{A_l}{n} \cos \left(\frac{2n\pi t}{T_0} + \varphi_0 - \varphi_l \right) \right] E \sin (\omega_0 t + \varphi_0), \quad (301)
 \end{aligned}$$

или

$$e = [X] \cdot E \cdot \cos (\omega_0 t + \varphi_0) + [Y] \cdot E \cdot \sin (\omega_0 t + \varphi_0). \quad (302)$$

Так же, как и в случае модуляции по синусоидальному закону, искажения огибающей и фазовая модуляция несущей определяются выражениями для $[X]$ и $[Y]$ [см. уравнения (277) и (278)].

Сравнение выражения (301) с выражением (298) для колебаний, подаваемых на вход фильтра, снова показывает, что составляющая $[X]$ сходна с первоначальной огибающей, но различные боковые частоты изменились по амплитуде и фазе. Составляющая $[Y]$ появляется вследствие асимметрии боковых полос и вносит искажения. Она пропорциональна коэффициенту модуляции m , поэтому и в данном случае искажения возрастают с увеличением глубины модуляции.

Искажения составляющей $[X]$ возникают из-за неравномерного изменения амплитуд и фазовых углов различных составляющих огибающей. Известно, что частотные искажения в линейной цепи с нелинейной фазовой характеристикой при симметричном входном сигнале проявляются в асимметрии сигнала на ее выходе (см. § 39).

Каждая синусоидальная составляющая выражения (298) для входного сигнала распадается в выражении (301) на две составляющие, отличающиеся по фазе. Однако, если предположить, что фазовая характеристика канала линейна и что асимметрия боковых составляющих обусловлена только амплитудной характеристикой, то можно выразить их фазы как

$$\left. \begin{aligned} \varphi_u &= \varphi_0 + \frac{2n\pi t_1}{T_0} \\ \varphi_l &= \varphi_0 - \frac{2n\pi t_1}{T_0} \end{aligned} \right\} \quad (303)$$

где $t_1 = d\varphi/d\omega$ — крутизна фазовой характеристики (см. § 40).

Как видно, фазовый угол относительно фазы φ_0 несущей любой боковой частоты пропорционален в этом случае ее частоте. Подстановка полученных выражений для φ_u и φ_l в выражение (301) для $[X]$ дает:

$$[X] = A_0 + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_u + A_l}{n} \sin \frac{2n\pi}{T_0} (t + t_1). \quad (304)$$

Это выражение аналогично выражению (298) для входного сигнала и отличается от него запаздыванием на время t_1 и изменением амплитуд различных составляющих, что влечет за собой симметричные искажения.

Аналогично может быть получено выражение для $[Y]$

$$[Y] = \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_u - A_l}{n} \cos \frac{2n\pi}{T_0} (t + t_1). \quad (305)$$

Форма огибающей зависит от величины A_u и A_l для различных боковых частот, однако, имеются некоторые виды искажений, типичные для каналов с асимметричными боковыми полосами и очень существенные в случае модуляции прямоугольными колебаниями. При модуляции скачкообразным сигналом, одиночным импульсом или любым сигналом, огибающая которого имеет разрыв непрерывности, получаются такие же искажения. Однако, для расчетов удобнее взять наиболее простой случай — модуляцию прямоугольными

колебаниями, имеющими ограниченный ряд гармонических составляющих. Природа этих искажений может быть показана на следующем примере.

Рассмотрим колебания, модулированные прямоугольными колебаниями, несущая частота которых совпадает с граничной частотой полосы канала (рис. 95). Глубина модуляции взята равной 100%, т. е. $m=1$, так как при этом получаются наибольшие искажения. Предположим, что фазовая характеристика имеет постоянную крутизну [уравнение (303)], а амплитудная характеристика канала имеет следующие значения A_u и A_l :

Номер гармоники	A_u	A_l
0 (несущая)	$A_0=0,5$	$A_1=0,5$
1	0,3	0,705
3	0,038	0,862
5	0,013	0,888
7	0	0,89
9	0	0,84
11	0	0,53
13	0	0,09

Полоса канала достаточно широка для пропускания тринадцатой гармоники боковой полосы; n имеет только нечетные значения, так как четные гармоники в прямоугольной огибающей равны нулю. Величины $[X]$ и $[Y]$ могут быть найдены путем подстановки значений A_0 , A_u и A_l из этой таблицы в (304) и (305). Они изображены на рис. 106 по взаимноперпендикулярным осям, что дает возможность построить геометрическое место концов результирующего вектора. Точки, обведенные кружками, соответствуют положению результирующего вектора через равные промежутки времени $t=T_0/18$ *. Угловая скорость и длина вектора изменяются во времени, но в любой момент времени угол Ψ определяет мгновенное значение фазы, а длина вектора дает амплитуду огибающей. Графики $[X]$ и $[Y]$ приведены на рис. 107 (пунктирные линии) вместе с графиком огибающей $\sqrt{X^2+Y^2}$ (сплошная линия). Как видно из рисунка, график $[X]$ близок по форме к первоначальной прямоугольной огибающей, но имеет конечное время нарастания, как это и следовало ожидать, ввиду ограниченной полосы пропускания канала. Составляю-

* При $Y=0$ вектор кажется как бы неподвижным, поэтому здесь совпадает несколько точек.

шая $[Y]$ вносит искажения в форму огибающей, проявляющиеся в виде острых пиков на краях прямоугольной огибающей (в точках разрыва непрерывности). Кривая нарастания огибающей ухудшается и отношение длительности сигнала к паузе возрастает.

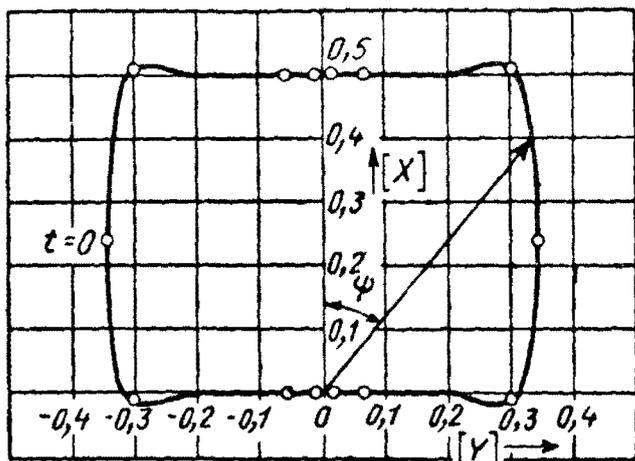


Рис. 106. Геометрическое место концов результирующего вектора при модуляции прямоугольными колебаниями.

В этом проявляются наиболее серьезные искажения сигнала, типичные для всех каналов с асимметричными боковыми полосами. Правда, и в симметричных каналах с ограниченной полосой пропускания наблюдаются выбросы сигнала в точках разрыва непрерывности, что было показано

на примерах в главе V. Однако эти выбросы никогда не могут быть такой величины, как пики, вызываемые асимметрией боковых полос.

на примерах в главе V. Однако эти выбросы никогда не могут быть такой величины, как пики, вызываемые асимметрией боковых полос.

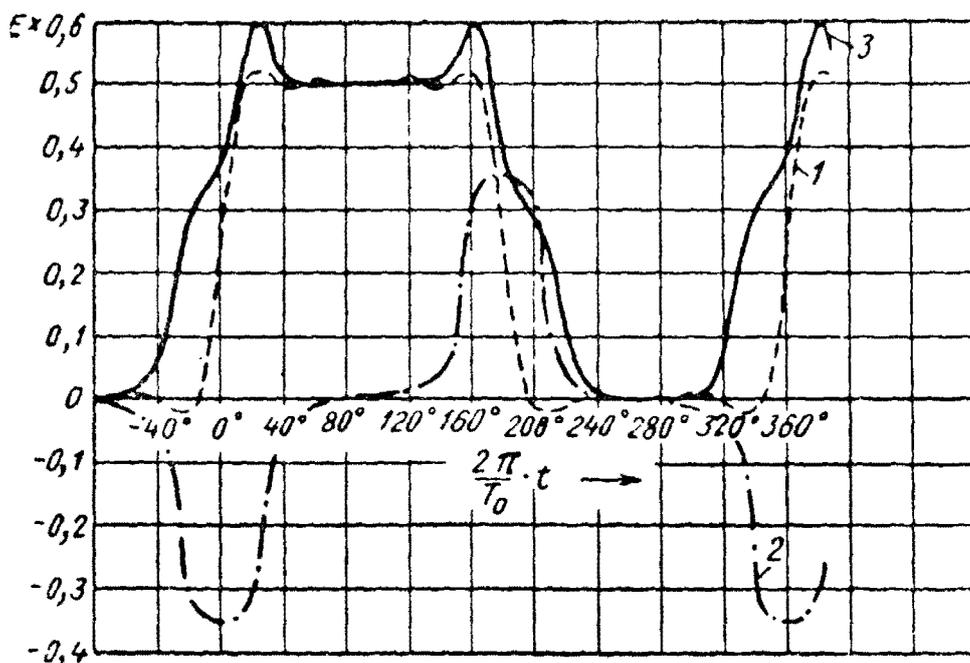


Рис. 107. Искажения прямоугольной огибающей в реальном асимметричном канале:

1—синфазная составляющая $[X]$; 2—составляющая в квадратуре $[Y]$; 3— результирующая огибающая.

Наличие искажений не снижает ценности передачи с асимметричными боковыми полосами для телевидения, так как влияние этих искажений на качество сигнала не столь велико, как может показаться на первый взгляд.

Например, мы считали, что глубина модуляции будет равна 100%, что соответствует максимуму искажений, тогда как в английской системе телевидения, например, минимальное значение огибающей никогда не опускается ниже 25% от максимального уровня, так как остальная часть используется для передачи синхронизирующих сигналов *. Некоторые пики сигнала на углах его огибающей иногда бывают даже желательны.

Выбросы сигнала, возникающие в обычных симметричных каналах с ограниченной полосой пропускания, были приведены на рис. 72 для фильтра с идеализированной прямоугольной характеристикой. Исследуем искажения, возникающие при совпадении несущей частоты сигнала с границей такой идеализированной характеристики.

Идеализированная амплитудная характеристика канала представлена внизу на рис. 108. Так как принято, что фазовая характеристика имеет одинаковую крутизну, влияние фазового сдвига можно не учитывать. В пятой главе уже указывалось на физическую нереальность таких характеристик и на границы их возможного использования.

Как показано на рисунке, несущая частота $\omega_0/2\pi$ совпадает с верхней границей полосы пропускания канала, так что верхняя боковая полоса полностью подавляется. Ширина полосы канала достаточна для пропускания всех частот нижней боковой полосы до $13/T_0$, как в рассмотренном выше примере. Значит, для $n \leq 13$ $A_n = 1$ и $A_n = 0$. Предположим, что $A_0 = 0,5$, т. е., что несущая как бы делит пополам спад характеристики (можно допустить, что эта прямая слегка наклонена). Подстановка этих значений в (304) и (305) даст:

$$\left. \begin{aligned} [X] &= 0,5 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{13} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{T_0} t \\ [Y] &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{13} \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{T_0} t \end{aligned} \right\} \quad (306)$$

Эти составляющие вычерчены пунктирными линиями на рис. 108 вместе с результирующей огибающей $\sqrt{X^2 + Y^2}$,

* См. сноску на стр. 187.

График $[X]$ опять приближается по форме к прямоугольной огибающей, а составляющая $[Y]$ вносит искажения.

Искажения снова проявляются в появлении острых „пиков“ на краях прямоугольной огибающей и в изменении времени нарастания огибающей. Интересно сравнить форму этой огибающей с формой сигнала, получающегося на выходе фильтра с идеализированной характеристикой, средняя частота которого совпадает с несущей частотой сигнала (рис. 72).

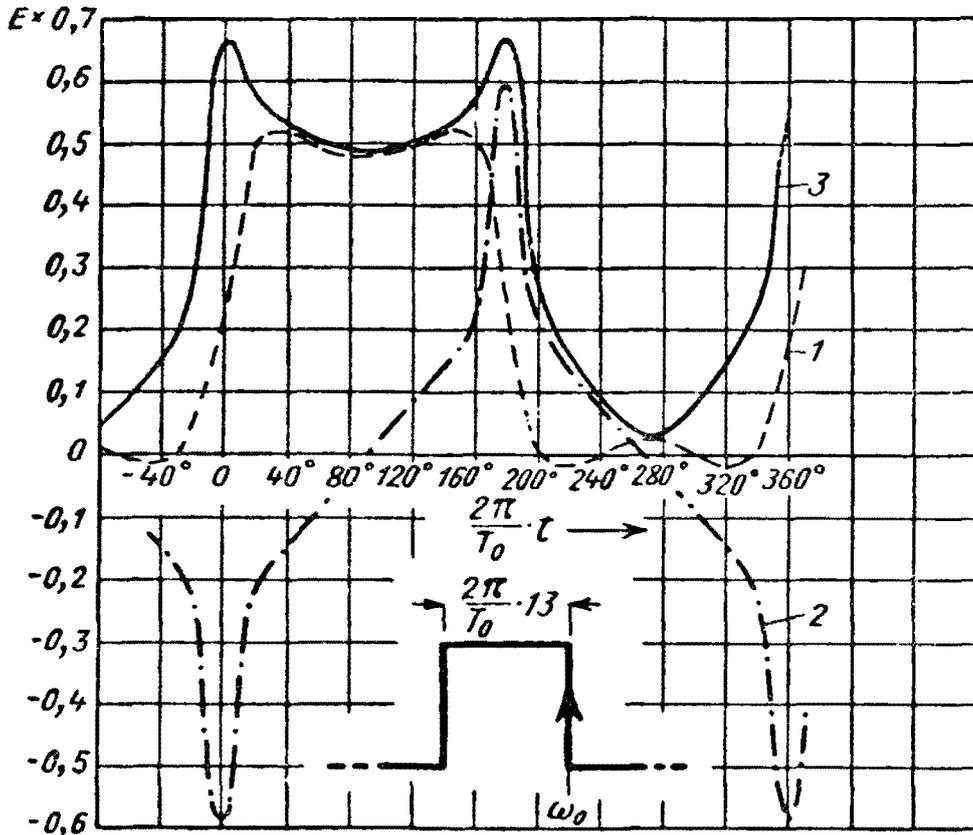


Рис. 103. Искажения прямоугольной огибающей в идеализированном однополосном канале:

1 — синфазная составляющая $[X]$; 2 — составляющая в квадратуре $[Y]$; 3 — результирующая огибающая.

Уменьшение скорости нарастания наиболее ясно заметно на впадинах огибающей, получающихся при глубокой модуляции. В предельном случае, при $m=1$, промежутки между следующими друг за другом прямоугольными сигналами фактически оказываются заполненными. Влияние такой формы нарастания кривой заключается в кажущемся уменьшении глубины модуляции. Искажения этого вида быстро ослабевают с уменьшением m .

Искажения, возникающие в асимметричных каналах, делают их неподходящими для импульсных систем, по крайней

мере для тех, в которых ширина принимаемого импульса имеет серьезное значение. Например, в некоторых радиолокационных системах момент появления переднего фронта импульса определяет точность определения координат, поэтому эффективное расширение импульса у основания и уменьшение скорости нарастания его ухудшают эту точность. Лучшие результаты можно получить, применяя симметричный канал с несколько уменьшенной полосой. При этом скорость нарастания сигнала хотя и уменьшается, но остается примерно постоянной от основания импульса до его вершины. Одновременно с этим отношение сигнала к шумам соответственно уменьшается за счет сужения полосы.

Прямоугольные идеализированные характеристики были применены некоторыми исследователями для анализа искажений, возникающих при асимметрии боковых полос. Однако полученные ими результаты были неудовлетворительны, так как расчетные искажения получались больше, чем в реальных цепях. Так, например, кривая сигнала на выходе реального фильтра (рис. 107) менее искажена, чем кривая сигнала на выходе фильтра с идеализированной характеристикой (рис. 108).

Пики, возникающие на краях огибающей, можно рассматривать, как высокочастотные искажения, а уменьшение скорости нарастания (вызываемое в симметричных каналах уменьшением амплитуды высокочастотных боковых составляющих) относится отчасти к низкочастотным искажениям. Увеличение времени нарастания объясняется не только тем, что оно имеет место в составляющей $[X]$ вследствие конечной ширины полосы пропускания, но и тем, что составляющая $[Y]$ вносит не только острые пики, но и низкочастотные колебания с периодом T_0 , которые заметнее в идеализированном случае (рис. 108) и являются причиной заполнения впадин огибающей выходного сигнала.

Этот последний вид искажений обязан боковым частотам, расположенным в непосредственной близости к несущей. В случае реального фильтра несущая совпадает с одной из границ характеристики, имеющей конечную скорость нарастания, так что A_u и A_l конечны для более близких к несущей боковых частот. При этом для наиболее низких частот разность $(A_l - A_u)$ пренебрежимо мала, поэтому, как видно из уравнения (305), низкочастотные составляющие $[Y]$ имеют незначительную амплитуду. Однако при идеализированной характеристике разность $(A_l - A_u)$ имеет конечное значение на всех частотах от нуля до частоты среза, вследствие чего появляются серьезные низкочастотные искажения.

65. Модуляция непериодическим сигналом. Эквивалентные модуляционные характеристики

В § 62 было показано, что в случае модуляции чистым синусоидальным тоном можно привести несущую частоту к нулю и построить эквивалентные модуляционные характеристики, с помощью которых непосредственно могут быть определены искажения огибающей. Было также установлено, что требуются две пары таких характеристик, которые для случая передачи с асимметричными боковыми полосами были обозначены как $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$.

Рассмотрим возможность применения характеристик, даваемых уравнениями (292) и (294), к другим формам огибающих, используя огибающую переходного типа в общем виде. Модулированные по амплитуде колебания можно представить как

$$e_1 = E \left\{ 1 + \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \right\} \cos \omega_0 t. \quad (307)$$

Выражение, заключенное в фигурных скобках, представляет огибающую, содержащую непрерывные спектры косинусоидальных $a(\omega)$ и синусоидальных $b(\omega)$ членов и постоянную составляющую. Выражение (307) можно представить в виде суммы несущей и боковых полос

$$e_1 = E \cos \omega_0 t + \frac{E}{2} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos (\omega_0 + \omega) t + b(\omega) \sin (\omega_0 + \omega) t] d\omega + \\ + \frac{E}{2} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos (\omega_0 - \omega) t - b(\omega) \sin (\omega_0 - \omega) t] d\omega. \quad (308)$$

Если эти колебания поданы на вход канала и несущая частота совпадает с границей полосы его пропускания (рис. 95), то искаженные асимметричные колебания на выходе канала будут иметь вид:

$$e = EA_0 \cos (\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{E}{2} \int_0^{\infty} A_u \{ a(\omega) \cos [(\omega_0 + \omega) t + \varphi_u] + \\ + b(\omega) \sin [(\omega_0 + \omega) t + \varphi_u] \} d\omega + \frac{E}{2} \int_0^{\infty} A_l \{ a(\omega) \cos [(\omega_0 - \omega) t + \\ + \varphi_l] - b(\omega) \sin [(\omega_0 - \omega) t + \varphi_l] \} d\omega. \quad (309)$$

Это выражение может быть представлено в виде суммы двух ортогональных составляющих, как это было сделано с выражением (274) для колебаний, модулированных чистым синусоидальным тоном:

$$\begin{aligned}
 e = & \left\{ A_0 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} A_l [a(\omega) \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l) + b(\omega) \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l)] + \right. \\
 & \left. + A_u [a(\omega) \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi_0) + b(\omega) \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_0)] d\omega \right\} \times \\
 & \times \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} A_l [a(\omega) \sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l) - \right. \\
 & \left. - b(\omega) \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_l)] - A_u [a(\omega) \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_0) - \right. \\
 & \left. - b(\omega) \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi_0)] d\omega \right\} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (310)
 \end{aligned}$$

или как и в предыдущих случаях

$$e = [X] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + [Y] \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (311)$$

где $[X]$ и $[Y]$ представляют составляющие модулированных колебаний в фазе и в квадратуре с несущей соответственно.

В этом общем случае, подобно более простым случаям, рассмотренным ранее, геометрическое место концов результирующего вектора определяется ортогональными составляющими $[X]$ и $[Y]$ так же, как искажение огибающей и фазовая модуляция несущей, в соответствии с уравнениями (277) и (278).

Здесь так же, как и в случае модуляции чистым синусоидальным тоном, выражения для $[X]$ и $[Y]$, заключенные в фигурные скобки в уравнении (310), представляют искаженную форму огибающей. Различные составляющие спектра огибающей изменились по амплитуде и фазе, поэтому можно считать, что исходная огибающая

$$e_E = F(\omega t) = E \left\{ 1 + \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \right\} \quad (312)$$

подается на две комплексные проводимости и создает на них сигналы с огибающими $[X]$ и $[Y]$.

Разделение членов, относящихся к огибающей и к характеристикам фильтра $A_l, \varphi_l \dots$ и т. д., в уравнении (310) для

искаженных колебаний показывает, что комплексные проводимости $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ идентичны с проводимостями, определяемыми уравнениями (292) и (294) для модуляции чистым тоном, что можно доказать, если раскрыть уравнение (310). Например, можно написать

$$\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1) = \cos \omega t \cdot \cos(\varphi_0 - \varphi_1) - \sin \omega t \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi_1).$$

и т. д. и собрать члены с ωt .

Однако делать это нет необходимости, так как доказательство вытекает непосредственно из доказательства для модуляции чистым (синусоидальным) тоном. Обе проводимости $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ линейны и, следовательно, результаты, полученные для одной модулирующей частоты, будут справедливы для нескольких частот одновременно. Тот факт, что искажения результирующих колебаний на выходе асимметричного канала изменяются с изменением глубины модуляции совсем не означает, что эти проводимости сами по себе нелинейны. Каждая пара характеристик $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ линейна, но амплитуды сигналов $[X]$ и $[Y]$ различно изменяются с изменением глубины модуляции, и для получения результирующей огибающей должны быть сложены геометрически.

Результирующие колебания (310) могут быть представлены в виде

$$e = EA_0 F(\omega t) [g_x(\omega) + jb_x(\omega)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ + EA_0 F(\omega t) [g_y(\omega) - jb_y(\omega)] \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

[см. уравнение (293)],

где проводимости $g_x(\omega) + jb_x(\omega)$ и $g_y(\omega) - jb_y(\omega)$ определяются уравнениями (294) в функции параметров асимметричного канала.

Таким образом, независимо от формы огибающей $F(\omega t)$ модулированных колебаний, искажения при передаче с асимметричными боковыми полосами всегда могут быть определены по эквивалентным модуляционным характеристикам. Несущую можно привести к нулевой частоте и считая, что огибающая $F(\omega t)$ поочередно воздействует на проводимости $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ определить ортогональные составляющие $[X]$ и $[Y]$ результирующих искаженных колебаний. По этим составляющим можно затем определить огибающую искаженных колебаний и фазовую модуляцию несущей.

66. Простой метод получения эквивалентных характеристик

Геометрический метод определения эквивалентных модуляционных характеристик был предложен Найквистом. Этот метод основан на том, что асимметричные характеристики, например, представленные на рис. 95, можно разложить на две группы составляющих, одна из которых обладает симметрией 1-го рода, относительно несущей частоты, а вторая—

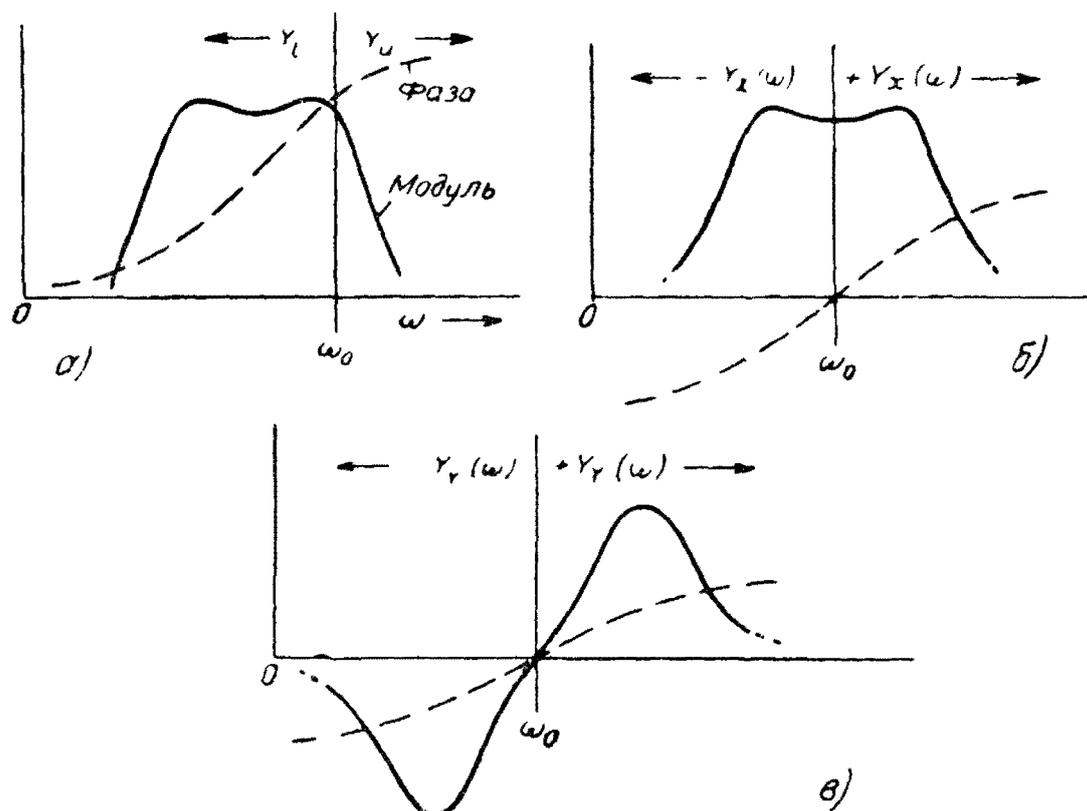


Рис. 109. Разложение характеристик асимметричного канала на составляющие с симметрией 1-го и 2-го рода.

симметрией 2-го рода, для чего характеристики должны быть представлены в комплексной форме. В этом параграфе будет показано, что эти составляющие идентичны с приведенными выше эквивалентными модуляционными характеристиками $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$.

На рис. 109,а приведены характеристики канала с асимметричными боковыми полосами. Несущая частота ω_0 совпадает с верхней границей полосы пропускания канала. Положим, как и прежде, что A_0 и φ_0 —модуль и фаза передаточной характеристики канала для несущей частоты ω_0 , а A_u , A_l , φ_u и φ_l —соответствующие значения для любой пары верх-

Эти две проводимости действительно являются составляющими характеристик асимметричного канала с симметрией 1-го и 2-го рода. Следует отметить, что символ $jY_y(\omega)$ включает в себе как значение проводимости $Y_y(\omega)$, так и начальный сдвиг фазы на -90° . Фаза $Y_y(\omega)$ при нулевой частоте была определена уравнением (296) и показана на рис. 102,б и 104,б.

Таким образом, эквивалентные модуляционные характеристики $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ могут быть получены, если:

а) представить графически действительную и мнимую часть характеристик асимметричного канала, выразив их через:

$$A_l/A_0, A_u/A_0, (\varphi_0 - \varphi_l) \text{ и } (\varphi_u - \varphi_0);$$

б) построить их зеркальные изображения относительно несущей частоты;

в) сложить действительные и мнимые части характеристик, что даст $2Y_x(\omega)$;

г) вычесть действительные и мнимые части, что даст $2jY_y(\omega)$.

Этот процесс показан на рис. 109, на котором представлены составляющие характеристик канала с симметрией 1-го и 2-го рода. Составляющие выражены через модуль и фазовый угол, а не в комплексной форме, которая была использована только для сложения и вычитания.

Следует отметить, что в этом построении (рис. 109,б) несущая частота не приводилась к нулю, так что строго говоря, полученные составляющие являются характеристиками полосового фильтра, эквивалентного фильтру с характеристиками $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$, полученными путем приведения их от нулевой частоты (рис. 102,б) к несущей частоте ω_0 .

Характерно, что процесс сложения и вычитания асимметричных характеристик и их зеркальных изображений идентичен с процессом получения синусоидальных и косинусоидальных (нечетных и четных) составляющих сложного спектра (§ 20). Действительно, между спектром сигнала и частотными характеристиками канала нет существенной разницы: и те и другие могут быть представлены кривыми, являющимися частотными функциями амплитуд и фаз синусоидальных составляющих в некоторой, обычно непрерывной, полосе частот.

67. Огибающие с высокой скоростью нарастания

В настоящее время находят широкое применение каналы связи с чрезвычайно большими скоростями нарастания огибающей. На выходе таких каналов можно получать сигналы с высокой разрешающей способностью.

Может случиться, например, при вариации частоты, что скорость нарастания или спадания огибающей должна быть такой же, как скорость изменения самой несущей частоты. Это значит, что время нарастания или спадания сигнала, должно быть сравнимо с четвертью периода несущих колебаний.

Спектр огибающей таких модулированных колебаний содержит столь высокие частоты, что они могут быть близки к несущей. Иными словами, спектр модулированных колебаний должен содержать боковые частоты почти от нулевой и до удвоенной несущей. Полосовые фильтры, предназначенные для передачи таких сигналов, должны иметь полосу пропускания, сравнимую с несущей частотой. Иногда вместо полосовых фильтров применяются для этой цели широкополосные фильтры нижних частот.

Необходимо следовательно выяснить, какое содержание вкладывается в слово „огибающая“ в этом случае, и какую форму будет иметь огибающая таких модулированных колебаний, если привести несущую частоту к нулю, а также соответствует ли огибающая, полученная для такого сигнала при расчете искажений, вызванных асимметрией боковых полос, действительной форме сигнала на выходе канала.

Можно легко показать, что „огибающая“ сигнала, нарастающего или спадающего за время, сравнимое с четвертью периода несущей, должна быть огибающей в математическом значении этого слова. Это не геометрическое место амплитуд модулированных колебаний, а геометрическое место точек касания с кривой модулированных колебаний, причем огибающая имеет такую же крутизну в каждой точке касания, как и модулированные колебания, независимо от фазы несущей частоты. Если вкладывать такой смысл в понятие „огибающей“, тогда принцип приведения несущей частоты к нулю и эквивалентные модуляционные характеристики могут применяться практически при любых скоростях нарастания сигнала.

Ниже приведено доказательство этого положения.

Уравнение (290) для модулированных колебаний с огибающей $F(\omega t)$ было написано в виде

$$e_1 = E \cdot F(\omega t) \cos \omega_0 t.$$

В этом уравнении огибающей является $E \cdot F(\omega t)$ и ее искажения были исследованы в предыдущих разделах. (Такие модулированные колебания могут быть получены практически, если приложить модулирующий сигнал $F(\omega t)$ к балансному модулятору с квадратичной характеристикой). В точках, общих для огибающей $E \cdot F(\omega t)$ и модулированных колебаний $E \cdot F(\omega t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где φ — некоторый фазовый угол, имеем

$$E \cdot F(\omega t) = E \cdot F(\omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

что дает

$$t = (N\pi - \varphi) / \omega_0, \quad (318)$$

где $N = 0, 2, 4, 6 \dots$ любое четное число.

Крутизна кривой модулированных колебаний равна

$$\frac{de}{dt} = -\omega_0 E \cdot F(\omega t) \sin(\omega_0 t + \varphi) + E \frac{dF(\omega t)}{dt} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

а в общих точках, определяемых уравнением (318),

$$\frac{de}{dt} = E \cdot \frac{dF(\omega t)}{dt}, \quad (319)$$

откуда следует, что огибающая является геометрическим местом точек касания с кривой модулированных колебаний

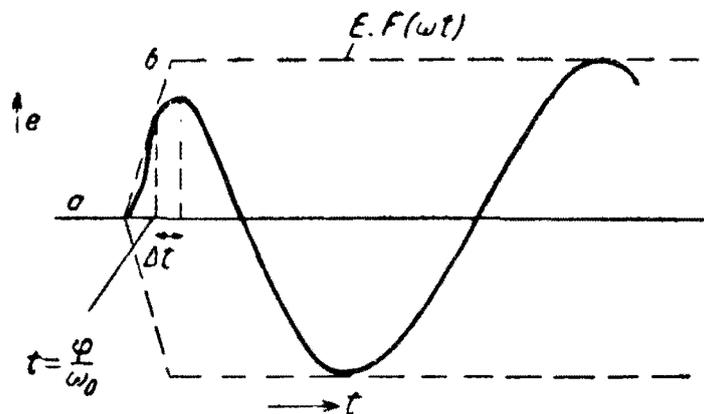


Рис. 110. Модулированные колебания с огибающей, скорость нарастания которой выше, чем скорость нарастания несущей частоты.

и имеет ту же кривизну в точках касания, что и кривая модулированных колебаний, независимо от фазового угла φ .

При этом, конечно, подразумевается, что модулированные колебания будут сильно отличаться по форме от синусоидальных на участках с большой скоростью нарастания или спадания.

На рис. 110 приведен график модулированных колебаний имеющих скорость нарастания даже бóльшую, чем скорость изменения несущей, и показано, как должна меняться форма колебаний, чтобы они соответствовали огибающей, показанной пунктирной линией.

Из рисунка видно, что в течение времени нарастания кривая сигнала касается огибающей $E \cdot F(\omega t)$ на Δt раньше, чем сигнал достигнет амплитудного значения. Это время Δt увеличивается с возрастанием скорости изменения сигнала, но при нормальной модуляции оно ничтожно, если время нарастания огибающей равно нескольким периодам несущей и огибающая почти совпадает с геометрическим местом амплитуд.

ГЛАВА VIII

ОТРАЖЕНИЕ И ЭХО-СИГНАЛЫ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ И ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

68. Примеры возникновения отражения

Явления отражения в несогласованных линиях или кабелях и возникновения эхо-сигналов в них и в искусственных линиях и схемах задержки в настоящее время достаточно известны.

Строго говоря, отраженный сигнал может возникнуть только в протяженных системах, т. е. в таких, как, например, линии, имеющие достаточную длину, по которым энергия может распространяться только с конечной скоростью. Это относится не только к электрическим колебаниям, но также к звуковым и другим волнам. Изучение поведения длинных линий и механизма возникновения отражения в них способствует лучшему пониманию характеристик схем задержки, фильтров и других цепей, которые не имеют достаточной протяженности и могут рассматриваться, как цепи с сосредоточенными постоянными. Кроме того, существует интересный метод анализа переходных процессов, рассматриваемый в этой главе и основанный на явлении отражения в электрических цепях. Он применим не только к длинным линиям, но и к цепям с сосредоточенными постоянными. Этот метод основан на использовании частотных характеристик установившегося режима и является приближенным методом, однако степень приближения может быть сделана по желанию сколь угодно большой. Взятое в этом, не основном, его значении для анализа переходных процессов, явление электрического отражения представляет средство оценки искажений сигнала по внешнему виду частотных характеристик цепи.

Явление отражения редко возникает в силовых линиях передачи, где частота очень низка (50 или 60 *гц*), если

только длина их не слишком велика, но оно легко появляется и причиняет неприятности в телефонных линиях, работающих на звуковых частотах. С начала применения длинных телефонных линий наблюдались серьезные искажения сигналов, вызванные отражениями энергии, прибывающими к началу линий с запаздыванием на время, занимаемое, например, гласной. Теперь применяются средства для задержания отраженной энергии в длинных телефонных линиях в виде схем „подавления эхо“. Позднее наблюдались явления, вызываемые отражениями в телевизионных каналах, возникающими в антенно-фидерных системах из-за неоднородностей в конструкции фидера и неточного согласования полного сопротивления антенны с фидером на всех передаваемых частотах.

Вследствие этого на экране телевизионных приемников появляется второе изображение, наложенное на основное, но несколько смещенное в сторону прямого хода развертки. Такое же явление наблюдается иногда в фототелеграфии, когда сигнал изображения, передаваемый по кабелю, отражаясь от несогласованной нагрузки на приемном конце, движется обратно к передатчику, где снова отражается и направляется к приемнику.

Хорошо известны явления отражения, возникающие в фидерах и волноводах при несогласованной нагрузке. В случае установившегося режима волна, отраженная от несогласованной нагрузки на конце линии, складывается с падающей волной, вследствие чего вдоль линии устанавливаются максимумы и минимумы напряжения и тока, известные под названием стоячих волн. Модуль и фазовый угол несогласованной нагрузки (например, антенны) определяют отношение максимума к минимуму, известное под названием коэффициента стоячей волны, а также их распределение относительно одного конца линии.

В последние годы нашли себе широкое применение в радиолокационной технике цепи с сосредоточенными постоянными, искусственные линии или линии задержки. Явление отражения используется здесь практически в схемах генерирования коротких импульсов. Длинные линии или кабели также применялись для этой цели. Принцип использования их показан на рис. 111. Скачок напряжения подается на вход схемы задержки или кабельной линии, например, путем внезапного разряда конденсатора. Волна распространяется вдоль линии и отражается от короткозамкнутого конца обратно к входным зажимам. Короткое замыкание представляет предельный случай рассогласования и вся энергия от-

ражается обратно, причем отраженная волна будет иметь противоположный знак. Отрицательная отраженная волна приходит к входным зажимам спустя некоторое время Δt , зависящее от длины кабеля, или эффективной длины линии задержки. Она вычитается из падающей волны и таким образом создается прямоугольный импульс длительностью Δt , по крайней мере, теоретически. Практически при проектировании таких схем возникает много трудностей.

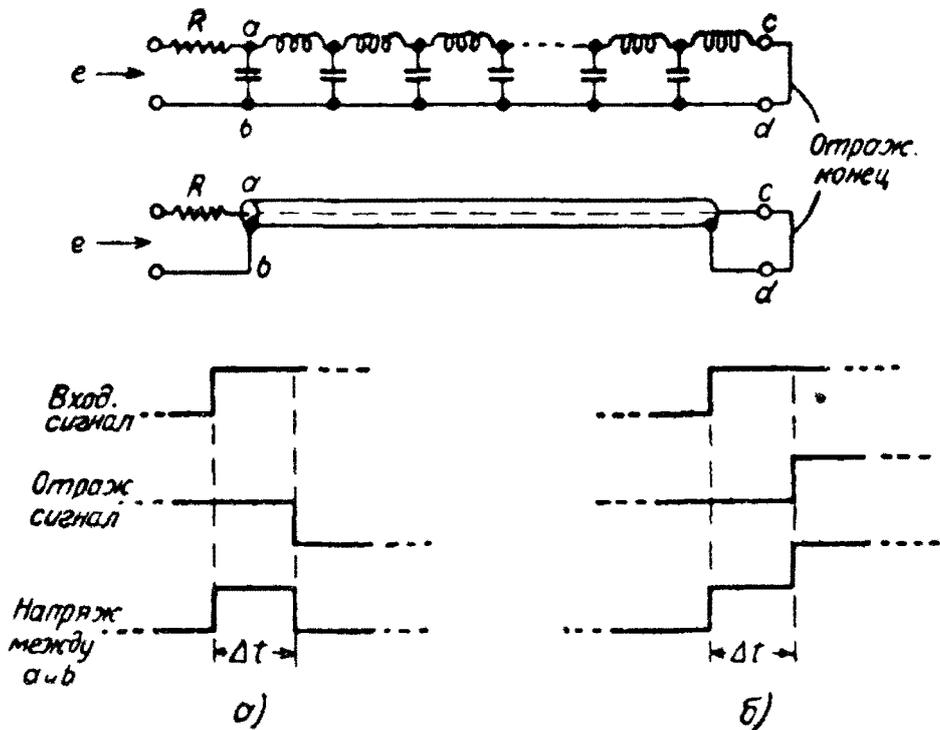


Рис. 111. Отражение скачкообразного сигнала в длинной линии и в цепи задержки:
 а) отражение при замкнутом конце; б) отражение при разомкнутом конце.

Разомкнутый конец линии также отражает обратно волну, но уже того же знака, что и падающая волна. О возникновении положительной и отрицательной отраженных волн здесь говорится без доказательств. Этот вопрос будет рассматриваться детально в § 71.

Мы ссылались на явление отражения как в длинных линиях, в которых энергия может передаваться только с конечной скоростью, так и в цепи задержки (представленной на рис. 111 в виде фильтра нижних частот типа K), являющейся цепью с сосредоточенными постоянными, к которой понятие скорости распространения энергии неприменимо ввиду того, что цепь не имеет протяженности. В таких цепях кажущееся время прохождения сигнала обусловлено

фазовой характеристикой и проявляется как время запаздывания огибающей. Это явление было рассмотрено в § 40, поэтому нет необходимости останавливаться на нем здесь. На выходных зажимах любой цепи с сосредоточенными постоянными, например, цепи задержки, сигнал должен появиться одновременно с подачей сигнала на входные зажимы. Однако, как это часто бывает, выходной сигнал может быть вначале очень мал и только спустя некоторое время он нарастает до полного своего значения. Это время нарастания, соответствующее Δt на рис. 111, может быть названо эффективным временем задержки. Оно соответствует времени распространения сигнала в длинной линии с конечной скоростью. Аналогично, отраженные сигналы в цепях с сосредоточенными постоянными могут быть названы эффективными, в отличие от действительных.

Соотношения между длинными линиями и эквивалентными им искусственными цепями с сосредоточенными постоянными и аналогия возникновения в них отражений наводит на мысль о возможности распространения теории отражения сигнала не только на искусственные линии и цепи задержки, но и на фильтры и другие цепи, которые могут быть получены из искусственной линии, и использования этой теории в качестве метода анализа переходных процессов в таких цепях.

Прежде чем переходить к вопросам применения этого метода, целесообразно подробнее рассмотреть соотношения между цепями с сосредоточенными и распределенными постоянными, чтобы проверить положения, на которых основан метод.

69. Цепи с сосредоточенными и распределенными постоянными

Элементарная теория распространения энергии вдоль длинной линии основана на некоторых допущениях, которые вполне оправдываются опытным путем. Наиболее важными из этих допущений являются геометрическая и электрическая однородности линии по всей длине, а также линейность и независимость от частоты основных параметров линии. Такими параметрами (постоянными линии) являются: последовательная индуктивность и последовательное сопротивление, параллельная емкость и параллельная проводимость, отнесенные к единице длины линии. Уравнения, определяющие ток и напряжение в любой точке линии, выводятся из рассмотрения элементарного отрезка линии δx , находящегося на

расстоянии x от начала линии, где включен источник энергии. Такой элементарный отрезок линии может быть представлен для определенной частоты в виде четырехполюсника с сосредоточенными постоянными, показанного на рис 112, *а*. Значения постоянных находятся измерением последовательных индуктивности и сопротивления и параллельных емкости и проводимости отрезка δx на данной частоте.

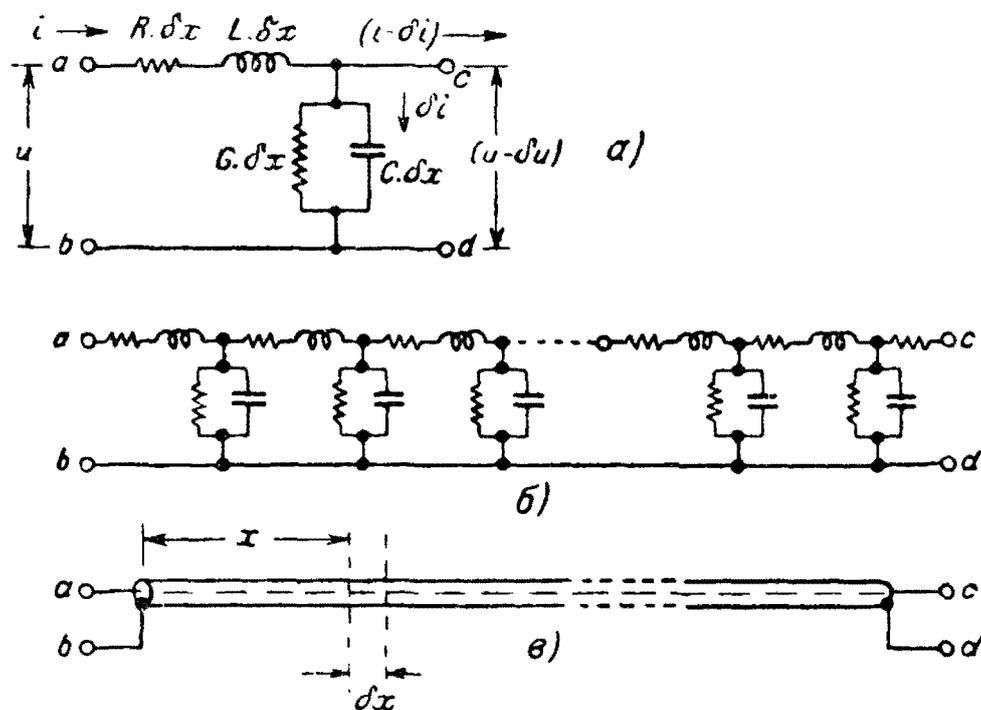


Рис. 112. Отрезок длиной линии и его эквивалент с сосредоточенными постоянными:

а) цепь, являющаяся ограниченным эквивалентом участка длиной линии длиной δx ; б) искусственная линия; в) участок длиной линии.

Если произвести такие измерения, то окажется, что постоянные изменяются с частотой, ввиду конечности длины отрезка линии. Следовательно, схема рис. 112, *а* эквивалентна участку длиной линии не полностью, а только на какой-то определенной частоте (см. § 28).

Пусть в результате измерения найдены значения постоянных L_1, R_1, C_1, G_1 . Так как они были измерены для длины δx , то делением их на δx можно найти эквивалентные значения индуктивности L , сопротивления R , емкости C и проводимости G на единицу длины для данной частоты, и представить постоянные эквивалента данного отрезка линии так, как показано на рис. 112, *а*.

На основании закона Кирхгофа мы можем написать уравнения для напряжения и тока в этой цепи

$$\left. \begin{aligned} -\delta u &= (R \cdot \delta x) i + (L \cdot \delta x) \frac{di}{dt} \\ -\delta i &= (G \cdot \delta x) u + (C \cdot \delta x) \frac{du}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (320)$$

или, подставляя измеренные величины L_1, R_1, C_1, G_1 ,

$$\left. \begin{aligned} -\delta u &= R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \\ -\delta i &= G_1 u + C_1 \frac{du}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (321)$$

Эти уравнения описывают процессы в цепи с сосредоточенными постоянными (рис. 112,а), независимо от формы тока i и напряжения u , но для отрезка линии они справедливы только при установившемся режиме на одной данной частоте. Переходные процессы в линии малой длины и в эквивалентной цепи с сосредоточенными постоянными, следовательно, не идентичны.

Длинная линия может быть представлена некоторым числом таких эквивалентных цепей, соединенных последовательно (рис. 112,б). Число их зависит от длины участков δx , на которые была разделена линия. Каждый отрезок δx должен быть заменен отдельным звеном эквивалентной цепи с сосредоточенными постоянными. Такая цепь (или ее варианты*) называется искусственной линией и имеет определенные свойства, аналогичные со свойствами длинной линии, о которых упоминалось в предыдущем параграфе.

Искусственная линия сходна с длинной линией (т. е. имеет идентичные входное, выходное и передаточное сопротивления), строго говоря, только на одной частоте, но с известным приближением она может служить эквивалентом длинной линии в определенном диапазоне частот. Если отрезок δx , замещаемый одним звеном, становится бесконечно малым, число звеньев искусственной линии возрастает до бесконечности. Чем больше число звеньев в эквиваленте линии данной длины, тем шире полоса частот, в которой свойства искусственной и длинной линии совпадают и тем

* Например, если последовательное сопротивление R и параллельная проводимость G ничтожно малы, то искусственная линия превращается в фильтр типа K (рис. 111).

больше сходства в характере переходных процессов в них. В пределе при $\delta x \rightarrow 0$ число звеньев искусственной линии стремится к бесконечности и она становится полным эквивалентом длинной линии.

Уравнения (320) можно видоизменить так, что они будут определять напряжение и ток в любой точке x отрезка линии.

Деля обе части уравнений на δx и полагая $\delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (322)$$

Эти уравнения справедливы для отрезка линии при любой форме u и i .

Математическое обоснование того, что действительное отражение не может иметь места в искусственной линии, становится теперь ясным*. В уравнении (322) входит переменная длина x , тогда как в уравнениях (321), описывающих процессы в звене искусственной линии, ее нет. В этом существенная разница уравнений, определяющих токи и напряжения в двух системах—линиях с распределенными и цепях с сосредоточенными постоянными.

Процессы в искусственных линиях и других схемах аналогичного типа, например, фильтрах, сходны с процессами в длинных линиях, как этого следует ожидать из принципа составления „эквивалентной“ схемы для участка линии. Многие схемы фильтров не похожи на схему искусственной линии по своей конфигурации, но тем не менее их можно получить как производные из эквивалентной схемы с сосредоточенными постоянными. Например, схема рис. 112,б переходит в схему фильтра нижних частот типа K при удалении из нее сопротивлений. Фильтрующие свойства такой схемы были впервые открыты при включении в телефонную линию катушек индуктивности, благодаря чему получилась система частично с сосредоточенными и частично с распределенными постоянными.

Как уже было сказано, искусственная линия эквивалентна длинной линии только на одной частоте и приблизительно

* Различие между действительным отражением в длинной линии и эффективным отражением в искусственной линии представляет в данном случае академический интерес. Оно приобретет важное значение, когда мы перейдем к рассмотрению переходных процессов в колебательных цепях.

эквивалентна в определенной полосе частот. Фильтры же, в идеальном случае не имеющие элементов, поглощающих энергию, эквивалентны длинной линии в полосе частот, которая может быть сделана как угодно широкой. За пределами этой полосы сходство кончается и фильтр не пропускает сигналов. В этом существенная разница между длинной линией и эквивалентной ей цепью с сосредоточенными постоянными.

Если длинная линия совершенна и не вызывает искажений сигнала, то ее частотные характеристики должны быть

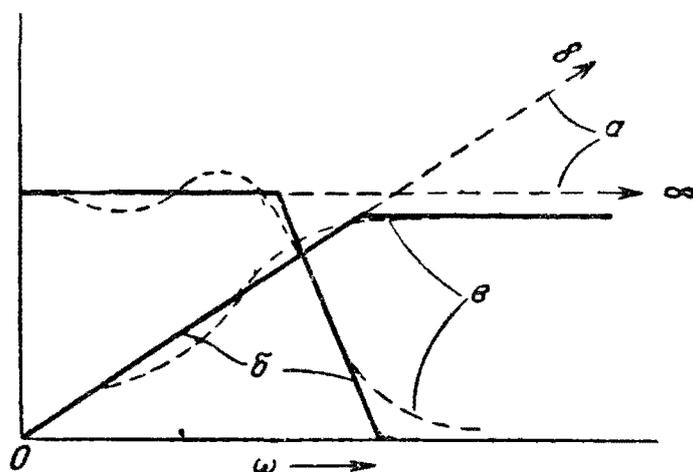


Рис. 113. Частотные характеристики:
 а) линии без потерь; б) идеализированного фильтра с прямоугольной характеристикой, и в) реального фильтра с присущими ему волнистыми характеристиками.

равномерными—модуль должен быть постоянным на всех частотах, а фазовый угол изменяться пропорционально частоте (см. § 38). Идеализированный фильтр имеет подобные характеристики в пределах полосы пропускания (сплошные линии на рис. 113), но как было показано в главе V, в фильтре с идеализированными характеристиками сигнал на выходе должен иметь некоторую конечную амплитуду до момента $t=0$, что физически явно невозможно. Реальные характеристики фильтра будут слегка отличаться от идеализированной формы и проектироваться за пределы полосы пропускания, как показано на том же рисунке 113 пунктирными кривыми*.

Отклонение характеристик от идеализированной формы, свойственное всем реальным фильтрам, должно быть таким, чтобы устранялись все следы сигнала на выходе до момента $t=0$, что неизбежно связано с появлением искажений сиг-

* См. также, например, характеристики реальных фильтров на рис. 33 и 57.

нала. Удобно считать, что эти искажения вызваны „эффективным“ отражением от конечной нагрузки вследствие отсутствия согласования. В любом фильтре с конечным числом звеньев неизбежно должны нарушаться условия согласования с нагрузкой вне полосы пропускания. Полное согласование может быть только при бесконечном числе звеньев фильтра, что практически невозможно.

Таким образом, появление отражения в фильтрах обусловлено отклонением его частотных характеристик от идеальной формы. Это обстоятельство будет рассмотрено подробнее позднее и распространено на другие цепи с сосредоточенными постоянными.

70. Длинная линия без отражения

В этом и последующих параграфах будет кратко рассмотрена та часть теории длинных линий, которая относится к вопросам отражения сигнала. Подробная теория длинных линий дается во многих учебниках, поэтому нет необходимости приводить ее здесь.

Выведенные в предыдущем разделе уравнения (322) определяют ток и напряжение в любой точке линии, находящейся на расстоянии x от ее начала. В этой форме уравнения справедливы как для установившихся, так и для неустановившихся токов и напряжений. Они могут быть упрощены, если рассматривать только установившийся режим. Если i и u являются чисто синусоидальными величинами, то уравнения можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{du}{dx} &= (R + j\omega L) i \\ -\frac{di}{dx} &= (G + j\omega C) u \end{aligned} \right\}. \quad (323)$$

Дифференцирование обеих частей по x дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= (R + j\omega L) (G + j\omega C) u \\ \frac{d^2i}{dx^2} &= (R + j\omega L) (G + j\omega C) i \end{aligned} \right\}. \quad (324)$$

Решение этих уравнений* нужно искать в форме

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} \\ i &= A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x} \end{aligned} \right\}, \quad (325a)$$

* Это обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, аналогичные рассмотренным в первой главе. Решение их должно выражаться через показательную функцию.

где

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (3256)$$

и A_1, A_2, A_3, A_4 — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями в начале линии. Предположим, что в начале линии ($x=0$) $u = u_S, i = i_S$. Это дает два соотношения. Для того же, чтобы определить все постоянные интегрирования, их требуется четыре. Остальные два можно определить дифференцированием обеих частей уравнений (325а) по x и подстановкой в исходные уравнения (323)

$$\begin{aligned} \gamma(A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}) &= -(R + j\omega L) i \\ \gamma(A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x}) &= -(G + j\omega C) u. \end{aligned} \quad (326)$$

Подстановка сюда $u = u_S$ и $i = i_S$ для $x=0$ дает два других соотношения, позволяющих определить постоянные интегрирования.

Ток и напряжение в любой точке линии x выразится как

$$\left. \begin{aligned} u &= u_S \operatorname{ch} \gamma x - i_S Z_0 \operatorname{sh} \gamma x \\ i &= i_S \operatorname{ch} \gamma x - (u_S / Z_0) \operatorname{sh} \gamma x \end{aligned} \right\}, \quad (327)$$

где

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \quad (328)$$

Z_0 имеет размерность сопротивления, и легко показать, что это входное сопротивление линии бесконечной длины. Следует заметить, что уравнения (327) написаны в общей форме и относятся к линии любой длины с любой нагрузкой в конце.

Рассмотрим случай бесконечно длинной линии. Такая линия должна иметь бесконечно большое затухание в воображаемой точке $x = \infty$, независимо от величины элементов R и G . Поэтому для этой точки $u = 0$ и $i = 0$. Подстановка этих значений в любое из уравнений (327) дает

$$\frac{u_S}{i_S} = Z_0. \quad (329)$$

Следовательно Z_0 действительно равно сопротивлению между входными зажимами линии. Далее, Z_0 должно равняться входному сопротивлению линии конечной длины L_a , если она нагружена сопротивлением, равным Z_0 . Это следует из того, что отрезок конечной длины L_a может быть отделен от бесконечно длинной линии. Оставшаяся часть линии бу-

дет также бесконечно длинной, в силу чего ее входное сопротивление должно быть равно Z_0 и она может быть заменена сосредоточенным сопротивлением Z_0 , присоединенным к концу отрезка (см. рис. 114). На основании этого Z_0 называется „характеристическим“ сопротивлением линии. Кроме того, оно носит название „волнового“ сопротивления линии.

Когда нагрузкой конечного отрезка является сопротивление, равное Z_0 , говорят, что сопротивление нагрузки согласовано с характеристическим сопротивлением линии и линия

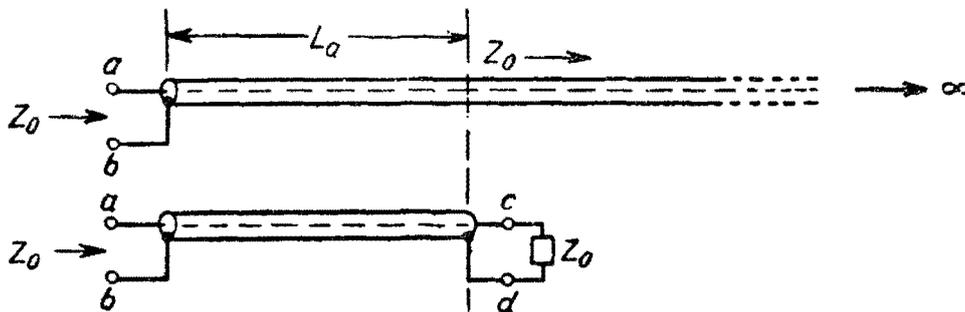


Рис. 114. Отрезок длинной линии, нагруженный сопротивлением, равным характеристическому сопротивлению Z_0 .

конечной длины L_0 ведет себя на этом участке так же, как бесконечно длинная линия. Например, при передаче сигнала по такой линии вся энергия будет поглощаться в сопротивлении нагрузки. Если рассматривать линию, как генератор с внутренним сопротивлением Z_0 , нагруженный каким-то сопротивлением, то максимальная энергия будет передаваться в нагрузку при равенстве ее сопротивления внутреннему сопротивлению генератора Z_0 .

При любом другом сопротивлении нагрузка будет получать меньшее количество энергии, и можно считать, что уменьшение происходит в результате отражения от несогласованного сопротивления и, вследствие этого, возврат части энергии обратно к генератору.

При правильном согласовании линии отражения энергии не будет. При этих условиях уравнения (327) упрощаются, и ток и напряжение в любой точке бесконечно длинной линии или линии конечной длины с согласованной нагрузкой выразятся как

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s e^{-\gamma x} \\ i &= i_s e^{-\gamma x} \end{aligned} \right\} \quad (330a)$$

Напряжение и ток имеют одинаковую форму и отношение их u/i постоянно для каждой точки линии и равно Z_0 , так как из уравнения (330а) следует

$$\frac{u}{i} = \frac{u_s}{i_s} = Z_0. \quad (330б)$$

Величина γ , обычно называемая „постоянной“ или „коэффициентом распространения“*, играет видную роль в теории линий.

Из уравнения (325б) видно, что γ является комплексной величиной и может быть представлена, как сумма действительной и мнимой части

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (GR - \omega^2 LC) \right]} + \\ + j \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (GR - \omega^2 LC) \right]}, \quad (331)$$

или в общем виде

$$\gamma = A + jB. \quad (332)$$

Выражения для A и B очень громоздки, но следует обратить внимание на то, что они отличаются только знаком.

Уравнения (330а) могут быть выражены через действительную и мнимую части γ как

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s e^{-Ax} (\cos Bx + j \sin Bx) \\ i &= i_s e^{-Ax} (\cos Bx + j \sin Bx) \end{aligned} \right\} \quad (333)$$

На основании уравнения (333) ток и напряжение в любой точке линии могут быть представлены векторами. Из уравнений видно, что как u , так и i (выражения для них одинаковы и отличаются только величиной) убывают с увеличением расстояния x по экспоненциальному закону и что фазовый угол пропорционален x . Направление и величина векторов тока и напряжения для любой точки линии могут быть определены из диаграммы рис. 115.

Величина A определяет скорость затухания модулей $|u|$ или $|i|$ и называется „постоянной“ или „коэффициентом затухания“, а величина B определяет фазовый сдвиг на единицу длины и называется „постоянной сдвига фазы“ или „коэффи-

* Она постоянна в любой точке линии, независимо от x , но безусловно является функцией частоты.

циентом изменения фазы* *. Вектор поворачивается на угол 2π на длине участка линии $x = 2\pi/B$. Эта величина может быть названа „длиной волны“.

На рис. 115,а показана проекция на плоскость такой трехмерной векторной диаграммы, имеющая вид логарифмической спирали, и три вектора для точек $x=0$, $x=x_1$ и $x=x_2$. Линия, соединяющая концы двух любых векторов, например, x_1 и x_2 , является тоже вектором, представляющим напряжение между этими точками линии.

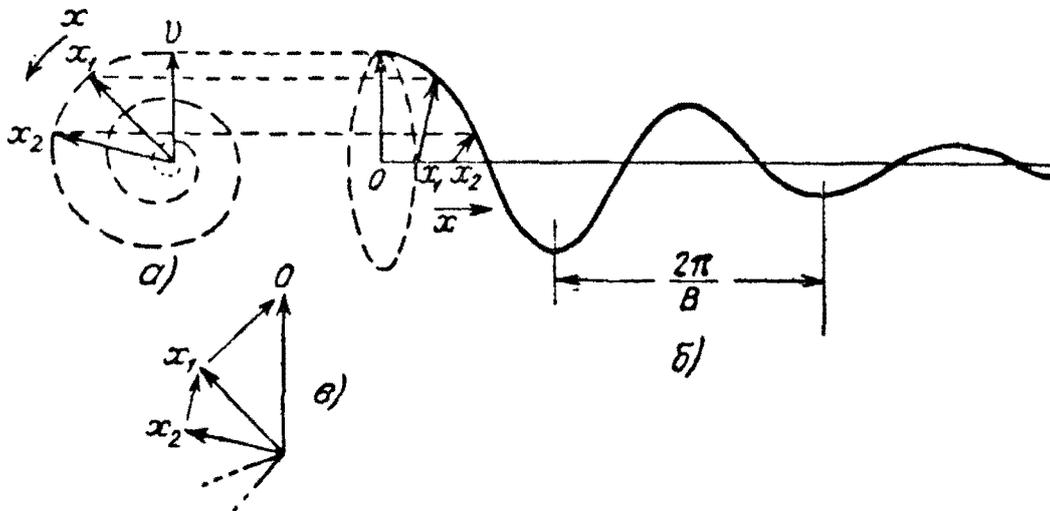


Рис. 115. Векторная диаграмма линии с потерями:

а) проекция векторов на плоскость; б) геометрическое место концов векторов вдоль линии; в) проекция на плоскость векторов двух звеньев искусственной линии.

Можно построить аналогичную векторную диаграмму для искусственной линии, но она будет состоять из ряда отдельных векторов для каждого звена, концы которых будут располагаться по такой же логарифмической спирали. На рис. 115,в даны векторы для первых звеньев искусственной линии.

Сравнение векторных диаграмм для длинной и искусственной линии показывает, что расстояние x в первой соответствует порядковому номеру звена во второй.

Векторная диаграмма для линии на рис. 115,а и б стационарна и показывает распределение тока и напряжения вдоль линии в данный момент времени. При вращении диаграммы с постоянной угловой скоростью ω , появятся изменения тока и напряжения во времени. Проекция спирали (рис. 115,б) при этом будет похожа на проекцию волны на плоскость. Ток и напряжение в любой точке x линии будут

* Величины A и B , так же как и γ , постоянны в любой точке линии, но являются функцией частоты.

изменяться во времени синусоидально (с частотой ω); амплитудное значение будет определяться длиной вектора в этой точке. За один период $2\pi/\omega$ волна проходит расстояние, равное длине волны $2\pi/V$, так что скорость распространения ее вдоль линии равна ω/V см/сек (считая, что V измеряется в радиан/см или, что постоянные R, L, G и C относятся к 1 см длины линии). Эта скорость является установившейся скоростью распространения волны и называется „фазовой скоростью“. Она не равна скорости, с которой импульс или какой-либо другой сигнал, содержащий ту или иную информацию, может передаваться по линии.

Чисто синусоидальная волна, как уже было показано, не может передавать какой-либо информации. Скорость, с которой распространяется импульс или другой одиночный сигнал, называется „групповой скоростью“. Как правило, она ниже фазовой скорости.

Разница между фазовой и групповой скоростью соответствует разнице между фазовым запаздыванием и запаздыванием огибающей (или групповым запаздыванием), рассмотренными в § 40 (рис. 62). Предположим, что кривая на рис. 62,а представляет фазовую характеристику линии в функции частоты. Тогда изменение фазы на единицу длины линии (названное нами постоянной сдвига фазы V на одной определенной частоте) будет функцией ω , как это следует из характеристики, и может быть обозначено $V(\omega)$. Фазовая скорость на любой частоте ω равна $\omega/V(\omega)$, а скорость, с которой передается сигнал, соответствующий небольшому участку спектра $\omega \pm \delta\omega$, равна $\delta\omega/\delta V(\omega)$, т. е. обратной величине крутизны касательной к фазовой характеристике в точке ω . Сигнал представляет собой модулированные колебания с несущей частотой ω , огибающая которых имеет форму, показанную на рис. 62,б.

Групповая скорость $\delta\omega/\delta V(\omega)$ равна обратной величине времени группового запаздывания (запаздывания огибающей) $\delta V(\omega)/\delta\omega$. Она имеет размерность скорости, так как постоянная фазового сдвига $V(\omega)$ определяется на единицу длины линии. Если величина $V(\omega)$ определяется для одного звена искусственной линии, тогда $\delta V(\omega)/\delta\omega$ соответствует времени запаздывания огибающей при прохождении сигнала через это звено, а обратная величина $\delta\omega/\delta V(\omega)$ — эффективной групповой скорости в искусственной линии, измеряемой числом звеньев, проходимых сигналом за одну секунду.

Сигнал, соответствующий узкому равномерному спектру, занимающему полосу частот $(\omega \pm \delta\omega)$ представлен на рис. 62,б в функции времени. Если такой сигнал будет подан на вход

линии, он будет распространяться вдоль нее со скоростью $\delta\omega/\delta B(\omega)$ и появится на выходе. Мы можем представить себе также этот сигнал распределенным в пространстве вдоль линии, т. е. как функцию от x . В случае искусственной линии такое представление, конечно, не имеет смысла.

71. Длинная линия с отражением

В предыдущем параграфе мы рассматривали случай передачи сигнала вдоль линии с произвольными параметрами R , L , G и C . Практически кратковременный сигнал, передаваемый по длинной линии, искажается по форме, так как постоянная распространения γ является функцией частоты (уравнение (331)). Групповое запаздывание $\delta B(\omega)/\delta\omega$ также является функцией частоты, вследствие чего различные части спектра сигнала будут передаваться с различными скоростями.

Представляют интерес два специальных случая.

А. Линия без искажений

Если выбрать параметры линии так, чтобы постоянная времени (R/L) последовательного плеча и (G/C) параллельного плеча (см. рис. 112), были равны, т. е.

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad (334)$$

то при подстановке этих значений в уравнение (331) для постоянной распространения получится

$$\gamma = A + jB = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}. \quad (335)$$

В этом случае постоянная затухания A не зависит от частоты, а постоянная сдвига фазы линейна и пропорциональна частоте (пунктирные прямые рис. 113). Сигнал любого вида будет передаваться по такой линии без искажения его формы со скоростью $\delta\omega/\delta B = 1/\sqrt{LC} = \text{const}$, причем фазовая и угловая скорости будут одинаковы.

Волновое сопротивление Z_0 становится чисто активным. При подстановке условий неискаженной передачи (334), уравнение (328) для Z_0 приобретает вид

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L(G/C + j\omega)}{C(R/L + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{R}{G}}, \quad (336)$$

обозначаемое обычно символом R_0 .

Очевидно, что идеальные условия неосуществимы практически, хотя к ним можно приблизиться. Существенное улучшение качества линии может быть достигнуто за счет увеличения L , так как для большинства линий и кабелей $R/L \gg G/C$. Индуктивность линии может быть увеличена как с помощью оболочки из железной проволоки или ленты и т. д. (при этом параметры линии будут изменяться с частотой), так и при применении спирали вместо прямого провода. В последнем случае емкость между витками является новым параметром и исходные уравнения (323) оказываются несправедливыми. Наиболее широко распространенный способ состоит во включении в линию катушек индуктивности через определенные промежутки, вследствие чего система будет частично с распределенными и частично с сосредоточенными постоянными. Влияние этих катушек заключается в том, что характеристики линии становятся равномернее в определенной полосе частот и, кроме того, появляется некоторая частота среза.

Б. Линия без потерь

Потери энергии в линии отсутствуют при $R=0$ и $G=0$. В этом случае постоянная распространения [уравнение (331)] равна

$$\gamma = A + jB = j\omega\sqrt{LC}, \quad (337)$$

т. е. постоянная затухания равна нулю, а постоянная сдвига фазы линейна и пропорциональна частоте, так же, как и в случае линии без искажений.

Из уравнения (328) опять получается

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = R_0. \quad (338)$$

Такая идеальная линия передает сигнал без искажений и затухания со скоростью $1/\sqrt{LC}$. Эквивалентная искусственная линия (рис. 112,б) становится фильтром нижних частот типа K . Эта схема часто применяется для задержки импульсов или других сигналов в телевидении и радиолокации и обычно называется схемой задержки. Она будет рассмотрена подробнее в § 73.

Уравнение энергии в общем виде для линии с R , L , G и C , имеющими конечное значение и не связанными каким-либо соотношением, можно вывести из исходных уравнений

(322) тока и напряжения в любой точке линии. Умножение обеих частей первого уравнения на i , а второго — на u дает

$$\left. \begin{aligned} -i \frac{\partial u}{\partial x} &= Ri^2 + L \frac{\partial i}{\partial t} i \\ -u \frac{\partial i}{\partial x} &= Gu^2 + C \frac{\partial u}{\partial t} u \end{aligned} \right\} \quad (339)$$

Складывая почленно, получим

$$-\frac{\partial}{\partial x}(ui) = (Ri^2 + Gu^2) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu^2 \right). \quad (340)$$

В левой части этого равенства стоит выражение для мощности, подводимой к бесконечно малому элементу линии, а в правой части — выражение для мощности, теряемой в R и G , и скорости изменения энергии, запасенной в индуктивности L и емкости C бесконечно малого элемента линии*.

Полученное уравнение справедливо для любой формы u и i и определяет энергию составляющих импульса или другого сигнала, распространяющегося вдоль линии. В линии без искажений или без потерь отношение u/i постоянно в любой точке линии и равно R_0 . Из (336) и (338)

$$R_0 = u/i = \sqrt{L/C}$$

или

$$Li^2 = Cu^2. \quad (341)$$

т. е. в этих идеальных случаях количества энергии, запасенной в индуктивности и емкости, равны.

Рассмотрим передачу по линии короткого прямоугольного импульса (рис. 116,а). Если длительность импульса равна T_1 , он будет „занимать“ участок линии длиной T_1/\sqrt{LC} , равной произведению времени на скорость. Это означает, что энергия запасается в каждый момент времени в индуктивности и емкости участка линии такой длины. Если линия с потерями, то энергия постепенно уменьшается по мере распространения импульса вдоль линии, но при соблюдении условий отсутствия искажений (334) он будет сохранять свою прямоугольную форму. В случае линии конечной длины, нагруженной сопротивлением, равным волновому (рис. 116,а), вся энергия будет поглощаться в сопротивлении R_0 , через

* Интересно сравнить это уравнение с уравнением энергии в цепи с сосредоточенными постоянными [уравнение (7)]. В уравнение (340) входит элемент длины.

которое потечет ток, имеющий форму прямоугольного импульса, и создаст на нем напряжение такой же формы. Следовательно, импульс будет передан по линии без отражения.

В том случае, когда линия разомкнута на конце (рис. 116, б), энергия импульса при его движении вдоль линии будет распределяться равномерно между L и C , однако при достижении им конца линии магнитная энергия должна исчезнуть, так как в этом месте не будет тока. Эта энергия не может быть рассеяна в виде тепла из-за отсутствия активного со-

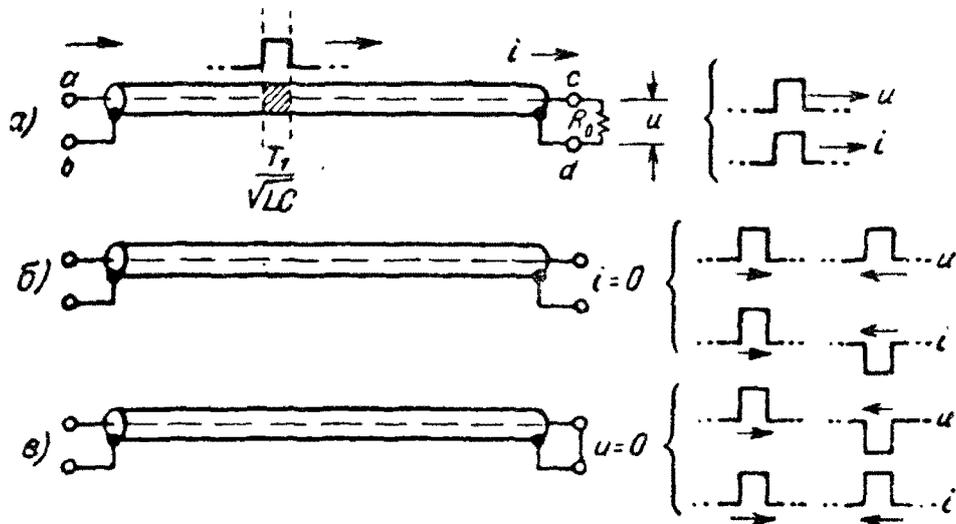


Рис. 116. Отражение прямоугольного импульса в линии:
 а) при нагруженной линии; б) при разомкнутой линии; в) при короткозамкнутой линии.

противления на конце линии. Она должна, следовательно превратиться в энергию электрического поля, что будет сопровождаться повышением напряжения в этой точке. Это повышение напряжения вызывается исчезновением магнитного поля, происходящим с постоянной скоростью в течение времени, равного длительности импульса T_1 , вследствие чего в этом интервале индуктируется постоянное напряжение.

Энергия, сосредоточенная в этот момент в электрическом поле, не может оставаться на конце линии, так как линия является проводником и будет поэтому распространяться в обратном направлении в виде отраженного импульса или эхосигнала. Знак отраженного импульса напряжения будет одинаковым со знаком прямого импульса, так как напряжение на разомкнутом конце линии повышается. Это значит, что отраженный импульс сложится с прямым в течение времени T_1 . Знак отраженного импульса тока должен быть противоположен знаку прямого импульса, так как на разомкнутом конце линии оба эти импульса должны взаимно уничтожаться также

в течение времени T_1 (магнитная энергия в этом месте равна нулю).

Аналогичные рассуждения можно применить при рассмотрении процессов на конце короткозамкнутой линии (рис. 116,в). В этой точке не должно быть энергии электрического поля и вся энергия импульса переходит в энергию магнитного поля, что сопровождается возрастанием тока. Энергия электрического поля исчезает равномерно до нуля в течение времени T_1 . В этом случае отраженный импульс напряжения будет противоположен по знаку прямому импульсу, а отраженный импульс тока одного знака с прямым импульсом. Два импульса тока складываются на короткозамкнутом конце линии в течение времени, равного длительности импульса T_1 .

В промежуточных случаях, когда линия нагружена несогласованным активным сопротивлением, часть энергии будет поглощаться в сопротивлении, а остальная часть распределится между электрическим и магнитным полем. В зависимости от того, будет ли сопротивление нагрузки больше или меньше R_0 , в конце линии будет преобладать электрическая или магнитная энергия и этим будет определяться знак отраженного сигнала. Величина отраженного сигнала зависит от величины поглощаемой в нагрузке энергии и будет тем больше, чем больше степень рассогласования в ту или другую сторону от R_0 .

Если включено реактивное сопротивление нагрузки, часть энергии импульса будет запасаться в нем. В таких случаях отраженный импульс создается запасенной в конце линии энергией вследствие рассогласования, но скорость перехода этой энергии будет зависеть от типа элементов и конфигурации цепи, образующей нагрузку. Отраженный импульс искажается по форме и длительность его должна быть больше, чем T_1 . Точная форма импульса зависит от схемы нагрузки.

Имеется важное различие между передачей импульса и непрерывной передачей синусоидальных колебаний вдоль линии, в частности, в случае несогласованной нагрузки. Как было показано выше, полное сопротивление R_0 в любой точке линии при установившемся режиме равно отношению напряжения в этой точке к току при согласованной нагрузке. Но при передаче по линии импульса он занимает только определенный участок ее, равный T_1/\sqrt{LC} (рис. 116,а), а по обе стороны от него линия находится в статическом состоянии и энергии в ней нет. Этот импульс является сигналом, передаваемым к рассогласованной нагрузке на конце линии. Так как передача занимает определенное время, то

условия в конце линии не будут влиять на импульс до тех пор, пока он не достигнет этой точки. То же справедливо для скачка напряжения или любого другого кратковремен-

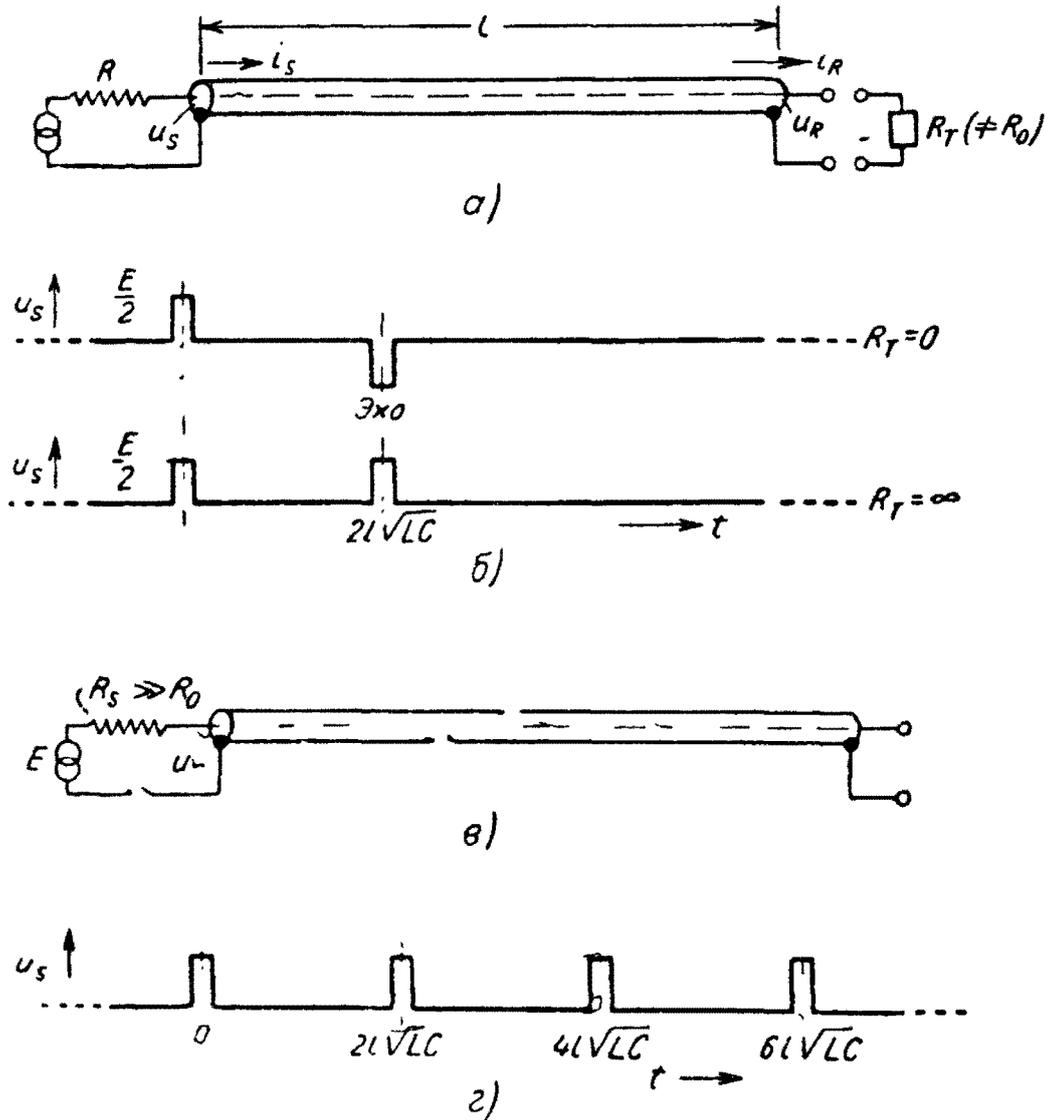


Рис. 117. Однократное и многократное отражение в линии:
 а) линия, рассогласованная в конце; б) импульсный сигнал и однократное эхо; в) линия, разомкнутая в начале и конце; г) импульсный сигнал и многократное эхо.

ного сигнала. Импульс ведет себя так, как если бы он распространялся вдоль линии с сопротивлением R_0 до момента подхода его к несогласованному сопротивлению в конце линии.

Импульс или другой сигнал, отраженный от несогласованной нагрузки на конце линии, движется обратно по направлению к ее началу. Если в начале линии соблюдаются условия согласования, отраженный импульс полностью поглотится, если же согласования нет, то он снова отразится.

Величина и знак вторично отраженного импульса будут зависеть от сопротивления в начале линии. При отсутствии согласования на обоих концах линии, в ней будет распространяться непрерывная серия отраженных импульсов, разделенных во времени промежутками, зависящими от длины линии и скорости распространения. На рис. 117, з в качестве примера показаны многократно отраженные импульсы в разомкнутой с обоих концов линии.

Особый интерес представляет линия, согласованная в начале и рассогласованная в конце — система с однократным отражением. Этот пример изображен рис. 117, а и б. Линия имеет сопротивление $R=R_0$ в начале и R_T — в конце. Если генератор посылает импульсы с амплитудой E , то на входных зажимах самой линии будет напряжение u_s с амплитудой $E/2$, так как она представляет для импульса сопротивление R_0 . Импульс, отраженный от конца линии, возвращается к ее началу, спустя время $t=2l\sqrt{LC}$, где l — длина линии и $1/\sqrt{LC}$ — скорость распространения, т. е. время, потребное для прохождения импульса по линии в прямом и обратном направлении. На рис. 117, б представлены формы прямого и отраженного импульсов для двух предельных случаев: $R_T=\infty$ и $R_T=0$.

72. Частотные характеристики линии с отражением

Прямой и отраженный импульсы, показанные на рис. 117, б, измерены в начале линии. Будем рассматривать сопротивление линии в этой точке, как функцию частоты.

На рис. 117, а изображена линия без искажений, длиной l , нагруженная сопротивлением R_T не обязательно равным R_0 . Напряжение и ток в любой точке линии определяются общими уравнениями (327). В конце линии $x=l$, $u=u_R$ и $i_R=i_R$. Подставляя эти величины и исключая u_R , получим:

$$\frac{u_s}{i_s} = Z_0 \frac{R_T \operatorname{ch} \gamma l + Z_0 \operatorname{sh} \gamma l}{Z_0 \operatorname{ch} \gamma l + R_T \operatorname{sh} \gamma l}. \quad (342)$$

Но $u_s/i_s = Z_s(\omega)$ является входным сопротивлением линии. Мы обозначаем его символом $Z_s(\omega)$, так как нас специально интересует зависимость его от частоты.

Если линия без искажений, то $Z_0=R_0$, т. е. является чисто активным сопротивлением и $\gamma = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}$ [со-

гласно уравнению (335) и (336)]. Гиперболические функции при этом переходят в круговые

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma l &= e^{V\overline{RG}} \cos \omega l \sqrt{LC} \\ \operatorname{sh} \gamma l &= j e^{V\overline{RG}} \sin \omega l \sqrt{LC} \end{aligned} \right\} \quad (343)$$

Подстановка этих величин, являющихся условиями отсутствия искажений в линии, в (342) дает

$$Z_s(\omega) = R_0 \frac{R_T \cos \omega l \sqrt{LC} + j R_0 \sin \omega l \sqrt{LC}}{R_0 \cos \omega l \sqrt{LC} + j R_T \sin \omega l \sqrt{LC}} \quad (344)$$

В предельных случаях рассогласования это выражение изменяется так:

$$\text{а) при } R_T = 0 \quad Z_s(\omega) = j R_0 \operatorname{tg} \omega l \sqrt{LC}, \quad (345)$$

$$\text{при } R_T = \infty \quad Z_s(\omega) = -j R_0 \operatorname{ctg} \omega l \sqrt{LC}. \quad (346)$$

$Z_s(\omega)$ — является сопротивлением между входными зажимами линии, когда к ним не присоединена внешняя цепь. Следовательно, формула (346) выражает полное сопротивление линии, разомкнутое в начале и в конце, в которой получается многократное отражение импульсов (рис. 117,2). Мы возвратимся к этому примеру позднее.

В случае однократного отражения (рис. 117,а) линия согласована в начале, так что между ее входными зажимами включено сопротивление R_0 . Таким образом, полное сопротивление между этими зажимами образуется параллельно соединенными R_0 и $Z_s(\omega)$. Используя (344) для $Z_s(\omega)$, полное сопротивление можно выразить как

$$\begin{aligned} \frac{R_0 Z_s(\omega)}{R_0 + Z_s(\omega)} &= \frac{R_0}{2} \left(1 + \frac{R_T - R_0}{R_T + R_0} \cos 2\omega l \sqrt{LC} \right) - \\ &- j \frac{R_0}{2} \left(\frac{R_T - R_0}{R_T + R_0} \sin 2\omega l \sqrt{LC} \right). \end{aligned} \quad (347)$$

Как видно из уравнения (347), сопротивление изменяется в функции частоты по синусоидальному закону. Амплитуда изменения зависит от отношения $R_T - R_0 / R_T + R_0$ и увеличивается с увеличением рассогласования, т. е. по мере того, как разница между R_T и R_0 возрастает. Синусоидальная форма частотной характеристики относится к случаю однократного отражения; полное сопротивление линии изменяется

синусоидально и при подаче на ее вход импульса в ней будет получаться отраженный импульс неискаженной формы. Система такого типа является единственной в своем роде и никакая другая электрическая схема кроме длинной линии, согласованной вначале и нагруженной несогласованным активным сопротивлением в конце, не имеет таких характеристик. Хотя мы рассматривали передачу прямоугольных импульсов (рис. 117), сигналы других типов будут отражаться линией, имеющей частотную характеристику входного сопротивления синусоидальной формы, также без искажений.

Практически такую характеристику нельзя осуществить, но она представляет большой интерес с точки зрения анализа, как это будет показано ниже.

В двух предельных случаях сопротивление линии (уравнение (347) равно:

а) при $R_T = 0$

$$\frac{R_0}{2} (1 - \cos 2\omega l \sqrt{LC}) + j \frac{R_0}{2} (\sin 2\omega l \sqrt{LC}), \quad (348)$$

что соответствует случаю отрицательного отраженного импульса напряжения;

б) при $R_T = \infty$

$$\frac{R_0}{2} (1 + \cos 2\omega l \sqrt{LC}) - j \frac{R_0}{2} (\sin 2\omega l \sqrt{LC}), \quad (349)$$

что соответствует положительному отраженному импульсу напряжения.

Последние две частотные характеристики полного сопротивления представлены на рис. 118 в виде действительной и мнимой частей. Картина отраженных сигналов была уже показана на рис. 117, б. „Период“ этих синусоидальных характеристик равен $\omega = \pi/l\sqrt{LC}$ и находится в простом соотношении со временем запаздывания отраженного импульса $2l\sqrt{LC}$.

В предельных случаях короткозамкнутой ($R_T = 0$) и разомкнутой ($R_T = \infty$) линии, отраженные импульсы будут иметь такую же амплитуду, как и передаваемые, так как принято, что линия без потерь, но, соответственно, положительного и отрицательного знаков. При промежуточных значениях R_T отраженные импульсы будут меньше по амплитуде, в зависимости от отношения $R_T - R_0 / R_T + R_0$, и, конечно, равны нулю при согласованной нагрузке ($R_T = R_0$).

Вернемся теперь к линии, рассогласованной в начале и

в конце. Уравнения (345) и (346) определяют входное сопротивление линии, разомкнутой в начале и замкнутой или разомкнутой в конце. Рис. 117,в соответствует последнему случаю, а на рис. 117,г показаны соответствующие ему отраженные импульсы — серия импульсов постоянной амплитуды, разделенных одинаковыми промежутками времени.

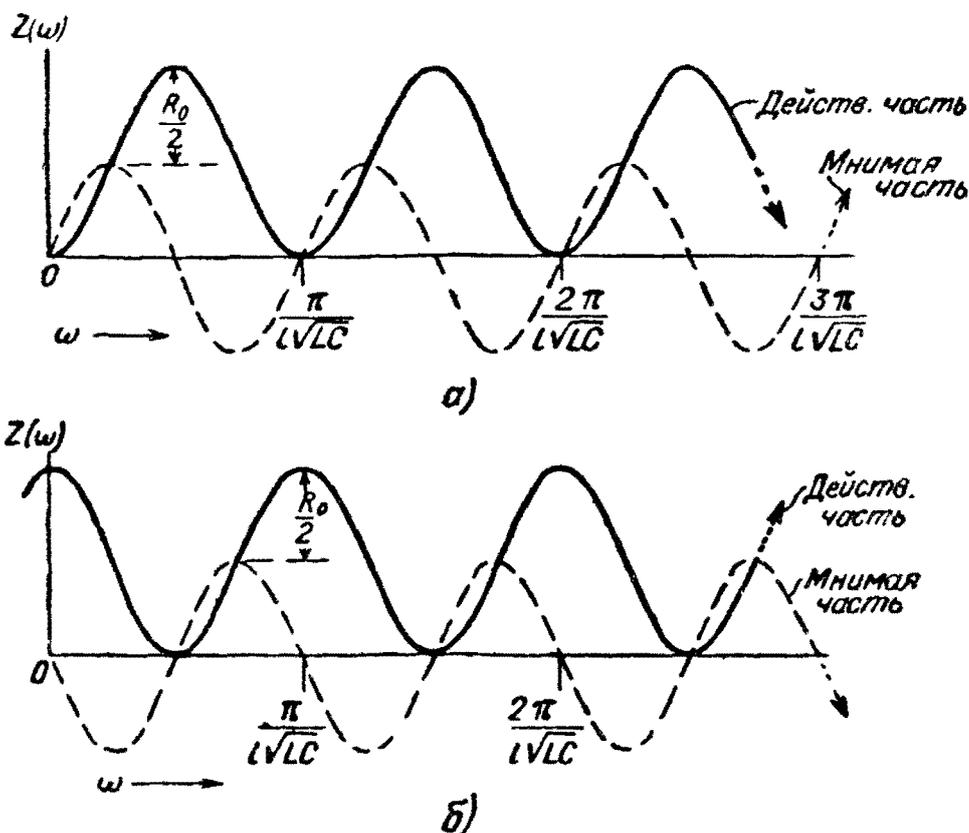


Рис. 118. Зависимость полного сопротивления линии (рис. 117,а) от частоты:
а) линия замкнута в конце, $R_T = 0$; б) линия разомкнута в конце, $R_T = \infty$.

Так как линия с однократным отражением имеет частотную характеристику полного сопротивления синусоидальной формы, то можно предположить, что характеристика линии с многократным отражением может быть разложена на сумму синусоидальных составляющих. „Периоды“ этих составляющих должны соответствовать интервалам появления отраженных сигналов $2l\sqrt{LC}$, $4l\sqrt{LC}$, $6l\sqrt{LC}$... и т. д. Рассмотрим разомкнутую линию (рис. 117,в и г). Частотная характеристика ее сопротивления определяется выражением (346), которое можно представить в виде

$$Z_s(\omega) = -jR_0 \operatorname{ctg} \omega l \sqrt{LC} = R_0 \frac{e^{j\omega l \sqrt{LC}} + e^{-j\omega l \sqrt{LC}}}{e^{j\omega l \sqrt{LC}} - e^{-j\omega l \sqrt{LC}}} \quad (350)$$

и переписать как

$$\begin{aligned} Z_s(\omega) &= R_0(1 + e^{-2j\omega l \sqrt{LC}})(1 - e^{-2j\omega l \sqrt{LC}})^{-1} = \\ &= R_0(1 + e^{-2j\omega l \sqrt{LC}})(1 + e^{-2j\omega l \sqrt{LC}} + e^{-4j\omega l \sqrt{LC}} + e^{-6j\omega l \sqrt{LC}} + \dots) = \\ &= R_0(1 + 2e^{-2j\omega l \sqrt{LC}} + 2e^{-4j\omega l \sqrt{LC}} + 2e^{-6j\omega l \sqrt{LC}} + \dots), \end{aligned}$$

или в виде суммы действительной и мнимой частей

$$\begin{aligned} Z_s(\omega) &= R_0 [1 + 2 \cos(2\omega l \sqrt{LC}) + 2 \cos(4\omega l \sqrt{LC}) + \\ &+ 2 \cos(6\omega l \sqrt{LC}) + \dots] - jR_0 [2 \sin(2\omega l \sqrt{LC}) + 2 \sin(4\omega l \sqrt{LC}) + \\ &+ 2 \sin(6\omega l \sqrt{LC}) + \dots]. \end{aligned} \quad (351)$$

Здесь сопротивление $Z_s(\omega)$ представлено рядом* синусоидальных составляющих, форма каждой из которых показана на рис. 118, б, но с „периодами“ равными $\pi/l\sqrt{LC}$, $\pi/2l\sqrt{LC}$, $\pi/3l\sqrt{LC}$ и т. д. Фактически же мы разложили выражение частотной характеристики полного сопротивления (346) в ряд Фурье, содержащий спектр гармоник с основным „периодом“, по угловой частоте $\pi/2l\sqrt{LC}$. Это разложение обратно разложению сигнала, приведенному в главе II, где основной период выражался определенным отрезком времени.

Аналогично можно разложить частотную характеристику для короткозамкнутой линии (345).

Можно считать, что каждая синусоидальная составляющая характеристики полного сопротивления (351) может создать единственный отраженный сигнал так же, как если бы линия данной длины была согласована в начале и разомкнута на конце.

Отраженные сигналы, определяемые рядом (351), имеют одинаковую амплитуду. Практически последующие отраженные сигналы должны прогрессивно убывать вследствие наличия потерь в линии.

* Ряд (351) не сходящийся, однако, нас не интересует суммирование ряда для того, чтобы показать, что он равен $-jR_0 \operatorname{ctg} \alpha l \sqrt{LC}$. Член $(1 - e^{-2j\omega l \sqrt{LC}})^{-1}$ разложен по формуле бинома, хотя модуль $e^{-2j\omega l \sqrt{LC}}$ равен единице. Мы приняли физически невозможные условия (что линия имеет активное сопротивление, равное нулю); если в линии имеются потери, как бы малы они ни были, это выражение становится равным $e^{-2j\omega l \sqrt{LC-r}}$ (где r — действительное), модуль будет меньше единицы и ряд (351) будет сходящимся.

Если N — любое целое число, то время запаздывания отраженного сигнала — $N2l\sqrt{LC}$; длина отражающей линии — Nl ; „период“ частотной характеристики полного сопротивления

$$\pi/Nl\sqrt{LC}. \quad (352)$$

73. Отражение в искусственной линии. Цепь задержки

Рассмотренные в предыдущем параграфе характеристики, обеспечивающие получение неискаженного отраженного сигнала, может иметь только длинная линия, но отнюдь не искусственная линия или какая-либо другая схема с сосредоточенными постоянными.

Если длинная линия заменена искусственной линией, то отраженный сигнал будет искажен по форме, так как частотные характеристики такой цепи не могут иметь точно синусоидальной формы (рис. 118), обеспечивающей неискаженное отражение.

Одной из наиболее часто применяемых искусственных линий является фильтр типа K , представленный на рис. 111.

Он часто применяется для задержки импульсов или других сигналов в телевидении и радиолокационных системах и в связи с этим обычно называется цепью задержки.

Такая цепь используется также для формирования прямоугольных импульсов. В этом случае на ее входные зажимы ab подается скачок напряжения, который отражается от короткозамкнутого конца cd с противоположным знаком. В результате сложения двух противоположных по знаку волн через промежуток времени Δt образуется прямоугольный импульс (рис. 111).

Время Δt является эффективным временем запаздывания отраженной волны, зависящим от числа звеньев в цепи и от ее частоты среза. Практически, отраженная волна будет искажена вследствие несовершенства частотных характеристик цепи, вследствие чего импульс не может иметь строго прямоугольную форму.

Если при заданной длительности задержки Δt увеличить число звеньев цепи, то форма импульса теоретически должна улучшиться. По мере приближения числа звеньев к бесконечности, схема приобретает свойства длинной линии без потерь.

Эффективное время задержки (значит, и длительность генерируемых импульсов) может быть оценена лучше всего по фазовой характеристике фильтра типа K . Искажения в отраженный сигнал вносят как амплитудная, так и фазовая характеристики цепи. Эти характеристики легко вычисляются

для цепочки из бесконечного числа звеньев и представлены в общем виде на рис. 119 для одного звена. На практике часто применяются цепочки из очень небольшого числа звеньев, что чрезвычайно усложняет расчет их характеристик. Они несколько отличаются от ранее приведенных*, однако все же оценка может быть сделана с достаточной точностью по идеализированным характеристикам.

Предпочтительно выбирать угловую частоту среза ω_c достаточно высокой, чтобы спектр приложенного сигнала занимал более линейную нижнюю часть фазовой характеристики (рис. 119,б).

Можно принять, что крутизна фазовой характеристики приблизительно равна

$$\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \approx \frac{\pi}{-1,3\omega_c}, \quad (353)$$

что соответствует крутизне прямой пунктирной линии OP на этом рисунке. При этом, следовательно, мы пренебрегаем фазовыми искажениями. Уравнение (353) определяет эффективное время задержки для одного звена и является грубо-приближенным эмпирическим правилом.

Если суммарное время распространения прямого и отраженного сигнала равно Δt , то схема задержки должна состоять из N звеньев, где

$$N = \frac{\Delta t}{2\pi} \cdot 1,3\omega_c \quad (354)$$

Следовательно, N возрастает пропорционально ω_c . Но как уже было показано, чем больше число звеньев для заданного времени задержки, тем больше приближаются свойства цепи к свойствам длинной линии без потерь. С увеличением ω_c спектр приложенного сигнала будет приходиться большей частью на линейный участок фазовой характеристики, при условии, что этот спектр ограничен. Когда N становится очень большим, эмпирический коэффициент 1,3 должен быть уменьшен до единицы.

Существуют очевидные причины, практически ограничивающие число звеньев, так что окончательный выбор определяется обычно компромиссом между стремлением уменьшить их количество и допустимыми искажениями. Улучшение линейности фазовой характеристики может быть получено за счет введения взаимной индукции между катушками соседних

* См. например, характеристики на рис. 78,а для одного П-образного звена.

звеньев. Это превращает схему в фильтр типа m и расширяет полосу частот, в пределах которой фазовая характеристика почти линейна. Лучшим значением взаимной индукции является $M \approx 0,1L$.

Для фильтра типа K (рис. 119) частота среза ω_c равна

$$\omega_c = 2/\sqrt{LC}, \quad (355)$$

а входное сопротивление (между зажимами ab)

$$R_0 \doteq \sqrt{L/C}, \quad (356)$$

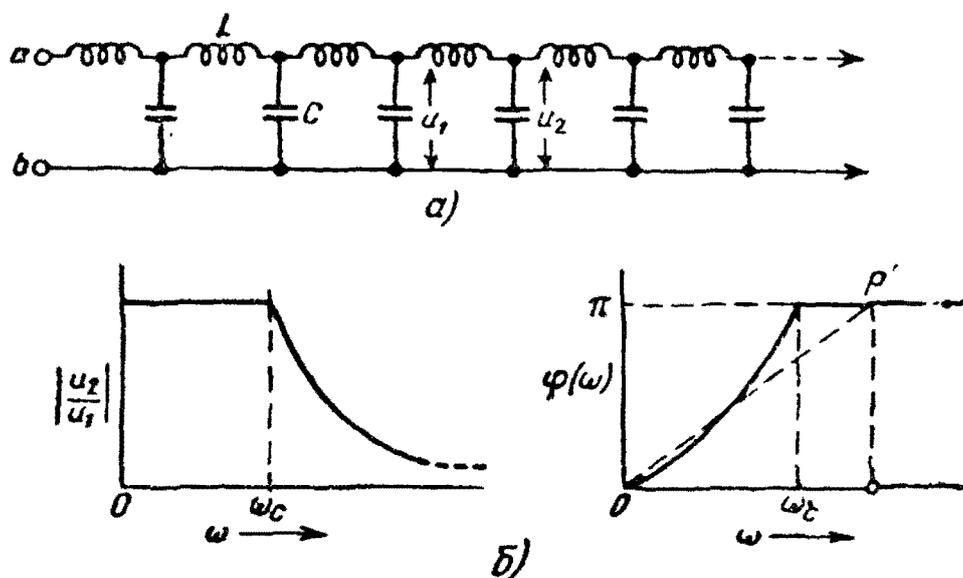


Рис. 119. Фильтр типа K ; $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$:

а) схема звеньев, число которых бесконечно велико; б) характеристики модуля и фазы одного звена.

как при Т-образном, так и при П-образном входе. При низких частотах сигнала ($\omega \ll \omega_c$) оба этих сопротивления становятся равными $R_0 = \sqrt{L/C}$.

Никакой фильтр типа K с конечным числом одинаковых звеньев не может точно воспроизвести свойство протяженности длинной линии с отражением, будь он короткозамкнут или разомкнут в конце, так как выбор числа звеньев при заданной задержке совершенно произволен. Чем больше число звеньев и чем выше частота среза ω_c , тем больше приближаются свойства фильтра к свойствам протяженных линий. Имеются, однако, некоторые неоднородные схемы с бесконечным числом элементов, по свойствам близкие к короткозамкнутым или разомкнутым линиям в отношении входного сопротивления, и, следовательно, пригодные для

создания эхо-сигналов. Полные сопротивления в начале короткозамкнутой и разомкнутой длинной линии определяются уравнениями (345) и (346) соответственно. Их можно представить графически в виде кривых $Z_s(\omega)$, чтобы пока-

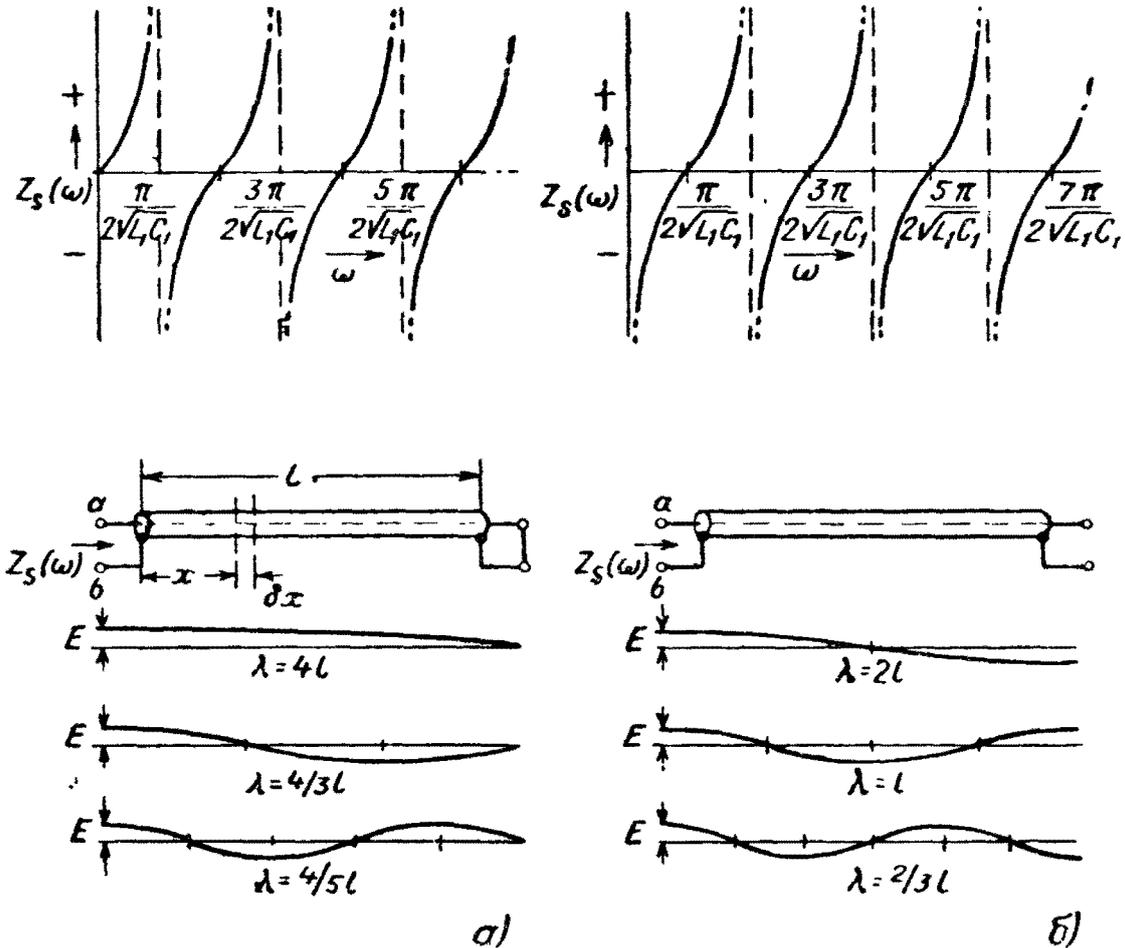


Рис. 120. Характеристики входного полного сопротивления $Z_s(\omega)$ и типы колебаний отрезка длинной линии:

а) замкнутый в конце отрезок линии; б) разомкнутый в конце отрезок линии.

зать, как эти сопротивления (в данном случае чисто реактивные) изменяются в зависимости от частоты ω . Эти кривые являются просто графиками тангенса и котангенса (рис. 120, а). Они имеют бесконечное число нулевых точек и полюсов, что позволяет составить эквивалентную схему на основании теоремы, изложенной в § 29. Эквивалентные схемы должны состоять только из реактивных элементов и иметь такое же число резонансов тока и напряжения.

Возможные типы схем были показаны на рис. 41: это цепочка из параллельных контуров (а или в), настроенных на резонанс токов, или цепочка из последовательных контуров (б и г), настроенных на резонанс напряжений.

Опорные резонансные частоты легко вычисляются, так как они соответствуют „нормальным“ видам колебаний длинной линии. Рассогласованная линия становится настроенной системой, когда в установившемся режиме в результате сложения прямых и отраженных волн в ней устанавливается знакомая картина стоячих волн тока и напряжения. Некоторые типы таких колебаний для более низких частот показаны на рис. 120,б. Опорные частоты резонанса токов и напряжений могут быть выражены через число четвертей длины волны, на которое делится длина l линии. На этом рисунке показаны стоячие волны напряжения, соответствующие резонансу токов, т. е. бесконечно большому входному сопротивлению $Z_s(\omega)$. Для замены короткозамкнутой или разомкнутой длинной линии (рис. 121) могут быть применены два основных типа цепей с сосредоточенными постоянными. Это или цепочка параллельных контуров, настроенных на резонанс токов (a и b), или цепочка последовательных контуров, настроенных на резонанс напряжений (b и z). В каждом случае цепочка должна рассматриваться как бесконечно длинная, и, следовательно, она не может быть осуществлена физически без какого-то приближения.

Пусть L_1 и C_1 соответственно полная индуктивность и емкость линии длиной l , т. е.

$$\begin{aligned} L_1 &= l \cdot L, \\ C_1 &= l \cdot C \end{aligned} \quad (357)$$

и $1/\sqrt{LC}$ — установившаяся фазовая скорость распространения волн. Так как частота равна скорости, деленной на длину волны, любая опорная частота ω_n определится как

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{\lambda_n \sqrt{L_1 C_1}}, \quad (358)$$

т. е. выражается через длину соответствующей стоячей волны. Остается выразить λ_n через длину линии l для разных видов колебаний (рис. 120,б).

1. Короткозамкнутая линия

На частотах резонанса токов, т. е. когда напряжение на зажимах ab максимально,

$$\lambda_n = 4l; \frac{4}{3}l, \frac{4}{5}l, \dots, \frac{4l}{2n-1}, \dots$$

а на частотах резонанса напряжений (максимальный ток)

$$\lambda_n = \infty, 2l, l, \frac{2}{3}l, \dots, \frac{2}{n}l, \dots$$

2. Разомкнутая линия

На частотах резонанса токов

$$\lambda_n = \infty, 2l, l, \frac{2}{3}l, \dots, \frac{2}{n}l, \dots$$

и на частотах резонанса напряжений

$$\lambda_n = 4l, \frac{4}{3}l, \frac{4}{5}l, l, \dots, \frac{4l}{2n-1}, \dots$$

Подстановка этих значений λ_n в уравнение (358) дает различные частоты, на которые должны быть настроены различные контуры цепи (рис. 121), чтобы ее входное сопротивление равнялось входному сопротивлению линии.

Необходимо еще найти требуемые отношения индуктивности к емкости. Они могут быть найдены из сопоставления энергий, запасенных в индуктивности и емкости линии и эквивалентной схемы. Следует заметить, что эквивалентные цепи на рис. 121, *а* и *б* необходимо питать генератором с известной э.д.с. e , причем ток, протекающий между зажимами ab , может не определяться для каждой данной частоты. Эти цепи состоят только из параллельных контуров, вследствие чего, когда частота приложенной э. д. с. совпадает с собственной частотой какого-либо из контуров, вся э.д.с. e оказывается приложенной к этому контуру и вся энергия будет сосредоточена в нем одном.

Аналогично, цепи, показанные на рис. 12, *б* и *г*, следует рассматривать только как питаемые заданным током i , так как когда частота тока попадает в резонанс какого-либо контура, он замыкает накоротко всю цепь и весь ток будет протекать только через этот контур, в котором и будет запасаться вся энергия.

Для краткости рассмотрим только короткозамкнутую линию и эквивалентную ей цепь рис. 121, *а*.

Пусть частота питающего ее генератора будет такой, что n -ый контур оказывается настроенным в резонанс и, следовательно, в нем сосредоточена вся энергия цепи. Напряжение u_x распределяется вдоль эквивалентной линии по синусоидальному закону и для настроенного в резонанс n -ого контура можно написать (см. рис. 120, *б*)

$$u_x = E \cos \frac{2\pi x}{\lambda_n} = E \cos \frac{2\pi x (2n-1)}{4l}. \quad (359)$$

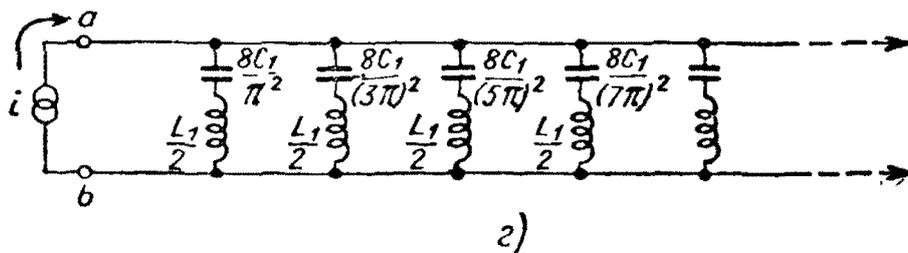
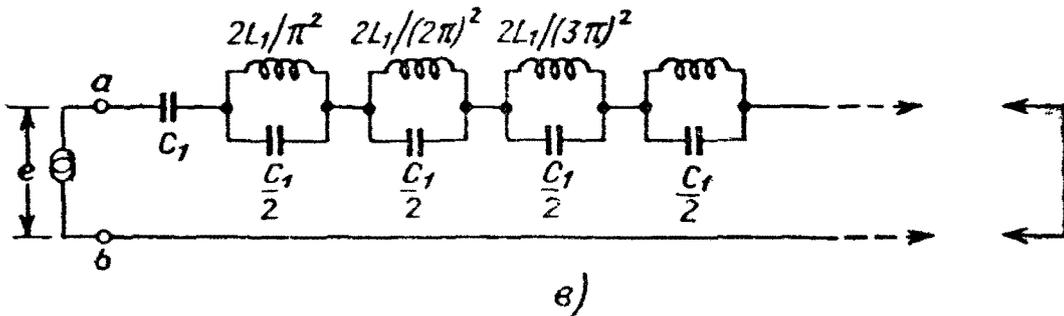
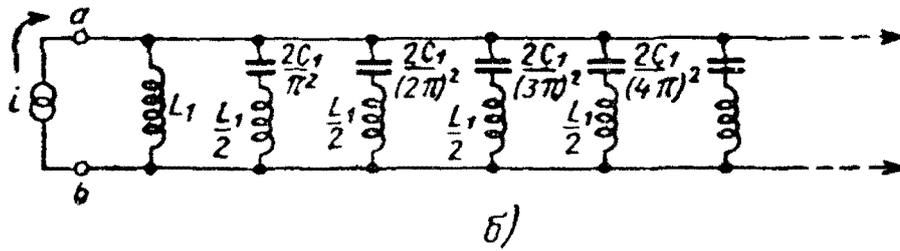
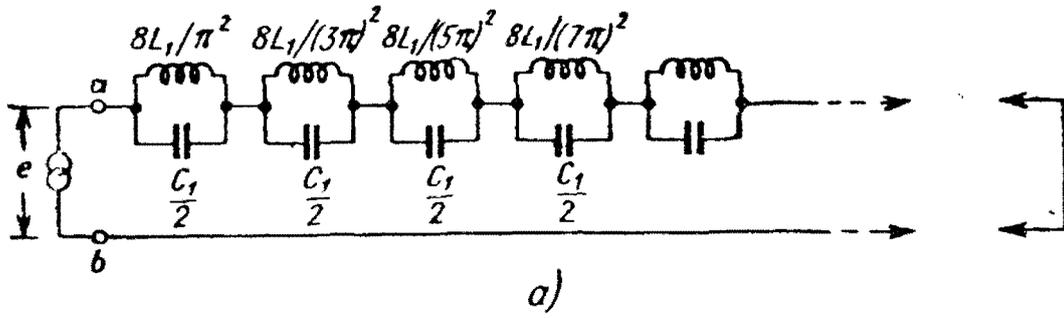


Рис. 121. Схемы, эквивалентные замкнутому и разомкнутому в конце отрезку линии:

- а) эквивалент замкнутой линии. Резонанс токов при $\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{L_1 C_1}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{L_1 C_1}}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{L_1 C_1}}, \dots$
 б) эквивалент замкнутой линии. Резонанс напряжений при $\omega = 0, \frac{\pi}{\sqrt{L_1 C_1}}, \frac{2\pi}{\sqrt{L_1 C_1}}, \dots, \frac{\pi}{\sqrt{L_1 C_1}}, \dots$; в) эквивалент разомкнутой линии. Резонанс токов при $\omega = 0, \frac{\pi}{\sqrt{L_1 C_1}}, \frac{2\pi}{\sqrt{L_1 C_1}}, \dots, \frac{\pi}{\sqrt{L_1 C_1}}, \dots$; г) эквивалент разомкнутой линии. Резонанс напряжений при $\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{L_1 C_1}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{L_1 C_1}}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2\sqrt{L_1 C_1}}, \dots$

Энергия в элементе линии δx равна $\frac{1}{2} C \delta x \cdot u_x^2$, а энергия вдоль всей длины линии равна

$$\frac{1}{2} \int_0^l C E^2 \cos^2 \frac{2\pi x (2n-1)}{4l} dx = \quad (360)$$

$$= \frac{1}{4} C l E^2 = \quad (361)$$

$$= \frac{1}{4} C_1 E^2, \quad (362)$$

т. е. не зависит от числа n четвертей волны, на которое делится линия, и, следовательно, от частоты. Поэтому любой конденсатор в эквивалентной схеме рис. 121, *а* должен иметь емкость $C_1/2$ и обладать при резонансе такой же энергией $\frac{1}{2} (C_1/2) E^2$. Значение индуктивности определится по частоте резонанса отдельных контуров.

Если взять эквивалентную цепь, питаемую током, например, изображенную на рис. 121, *б*, то можно показать, что энергия в момент резонанса будет равна $\frac{1}{4} L_1 I^2$, и, следовательно, индуктивность каждой катушки в контурах должна быть равна $L_1/2$. Аналогично определяются значения элементов в схемах рис. 121, *в* и *г*, эквивалентных разомкнутой линии. Эти значения указаны на рисунке.

Каждая из эквивалентных цепей теоретически должна состоять из бесконечного числа настроенных контуров, но практически содержит конечное число их, причем сравнительно небольшое, так как величина изменяемых элементов быстро приближается к нулевым или бесконечно большим значениям.

Такие цепи могут применяться вместо фильтров типа K в схемах формирования импульса.

Следует обратить внимание на то, что входные сопротивления линии, выражаемые уравнениями (345) и (346), взаимнообратны. Поэтому эквивалентные им цепи с сосредоточенными постоянными являются цепями-двойниками и цепь, изображенная на рис. 121, *г*, может быть образована как двойник цепи *а*), а цепь *в*) — как двойник цепи *б*), по простому правилу, изложенному в § 28. Произведение (345) и (346) равно $R_0^2 = L/C = L_1/C_1$ и дает отношение любых двух элементов-двойников.

Таким образом, два отрезка длиной линии, равных друг другу по длине, но один из которых замкнут накоротко, а другой разомкнут (рис. 120), являются примерами цепей-двойников с распределенными постоянными.

Параметры эквивалентных схем рис. 121 можно определить и чисто аналитически, разлагая выражение для тангенса (345) и котангенса (346) для полного входного сопротивления короткозамкнутой и разомкнутой линии в ряды с членами, содержащими L_1 и C_1 . Однако если сделать это на основе физических представлений, как в данной книге, соотношения между эквивалентными системами с распределенными и сосредоточенными постоянными становятся более понятными.

В эквивалентные схемы могут быть введены активные сопротивления (линия с потерями) при условии, чтобы добротность Q всех параллельных и последовательных резонансных контуров была одинаковой. Для этого должно быть включено активное сопротивление в каждый последовательный контур последовательно, а в каждый параллельный контур — параллельно. Величина сопротивлений определяется по заданному значению добротности Q (см. § 32).

74. Анализ переходных процессов по методу парных отраженных сигналов

Хотя в большинстве случаев отраженный сигнал очень мало похож по форме на приложенный сигнал, тем не менее исследование по принципу эхо может быть распространено не только на искусственные линии, но и на другие цепи.

На рис. 66 были показаны графики одиночных сигналов, разделенных на ряд соприкасающихся друг с другом импульсов или на ряд налагающихся друг на друга скачков.

Можно, конечно, делить график и на элементарные сигналы другой формы, однако импульсы и скачки являются наиболее простыми.

Предположим теперь, что кривая $f(t)$ на рис. 66,а представляет сигнал, созданный в цепи приложенным к ней скачком; тогда каждый элементарный скачок, на которые разделен сигнал $f(t)$ можно рассматривать как отражение приложенного сигнала. Эти отраженные сигналы отстоят друг от друга на время $\delta\tau$ и имеют различные значения.

На основании этого можно считать, что цепь заменяется несколькими длинными линиями, на входные зажимы которых подаются скачкообразные сигналы. Длина каждой последующей линии увеличивается для получения увеличенного на $\delta\tau$ времени запаздывания. Эти линии должны быть нагружены

несогласованными сопротивлениями различной величины, чтобы в каждой получался отраженный сигнал нужной величины. Такая система длинных линий будет приблизительно воспроизводить сигнал $f(t)$ при суммировании отраженных сигналов на входных зажимах. Этот процесс показан на рис. 122. Чем меньше отрезок времени δt , тем больше потребуется взять линий и тем точнее будет воспроизводиться сигнал $f(t)$.

Таким же образом может воспроизводиться сигнал, разделенный на ряд коротких импульсов, если на вход каждой длинной линии подавать один такой импульс.

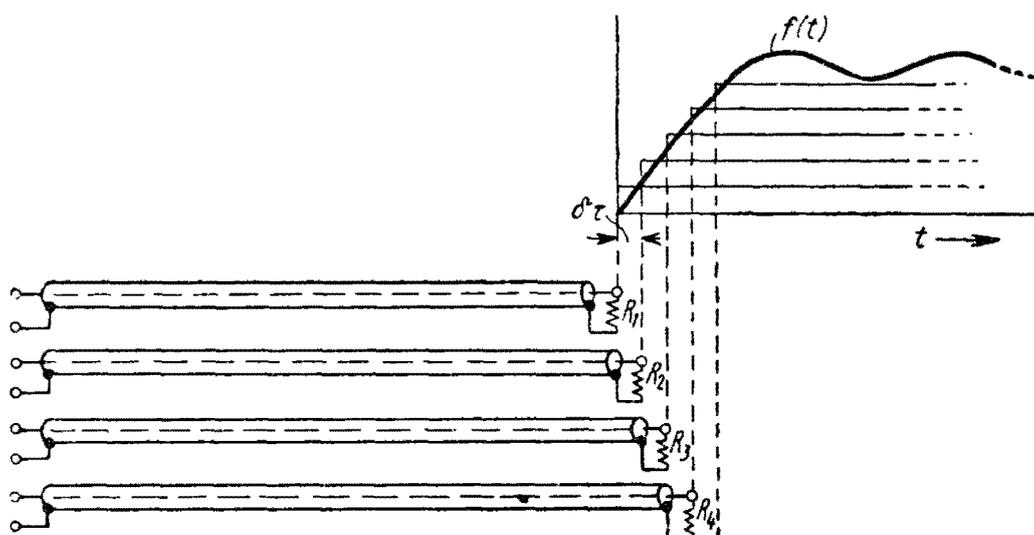


Рис. 122. Искусственное воспроизведение любой формы сигнала с помощью некоторого числа отрезков длинной линии (на рисунке показаны только первые четыре отрезка).

Каждый последующий отрезок длиннее предыдущего на $\delta t/VLC$. На вход каждого отрезка подается скачкообразное напряжение.

На рис. 122 не показано, что все входные зажимы соединены параллельно, так как практически это вызвало бы вторичное отражение вследствие рассогласования. Так как весь принцип является математической абстракцией, можно считать, что скачкообразные сигналы подводятся одновременно ко всем входным зажимам и что отраженные сигналы складываются на этих зажимах без их соединения. Практически это можно осуществить с помощью ряда четырех-или пятиэлектродных ламп, каждая из которых соединена с отдельной линией.

Наиболее простой способ сложения отдельных сигналов состоит в применении специальной длинной линии с отводами, расположенными с определенными промежутками по ее длине. Скачок напряжения подводится к входным зажимам и при-

ходит к точкам ответвления с соответствующим запаздыванием. Затем сигналы, получаемые на этих ответвлениях, регулируются для придания им должной величины и складываются в схеме, содержащей несколько ламп. Наблюдая результирующий сигнал на осциллографе и регулируя запаздывание и ослабление различных составляющих, можно получить желаемую форму сигнала.

Можно добиться, чтобы специальная линия такой конфигурации имела характеристики, соответствующие фильтру заданного типа. Особый интерес представляет случай суммирования отраженных сигналов, форма которых выражается интегральным синусом (рис. 70). Частотные характеристики такой специальной линии будут очень близки к идеализированным прямоугольной амплитудной и линейной фазовой характеристикам.

С подобными специальными линиями можно воспроизвести характеристики ряда типов фильтров.

Возможность замены данной цепи рядом отрезков линий, нагруженных несогласованными сопротивлениями (рис. 122), наводит на мысль, что частотная характеристика цепи может быть разложена в ряд составляющих, каждая из которых соответствует характеристике рассогласованной линии, т. е. синусоидальной кривой, определяемой уравнением (347) и показанной на рис. 118 для двух предельных случаев рассогласования.

Каждое семейство синусоидальных характеристик определяет форму отраженного сигнала; время запаздывания отраженного сигнала зависит от „периода“ этих характеристик.

Следовательно, разложение частотной характеристики цепи в ряд Фурье дает возможность определить реакцию цепи на приложенный кратковременный сигнал путем сложения отраженных сигналов, определяемых каждой составляющей ряда.

Этот метод рассмотрения переходных процессов известен под названием „метода парных отраженных сигналов“ или „метода парных эхо“. Он будет рассмотрен здесь подробнее.

Пусть $Z(j\omega)$ — характеристика цепи (двух-или четырех-полюсника) и W — диапазон частот, занимаемый спектром приложенного сигнала. Кривую $Z(j\omega)$ можно представить рядом Фурье с основной частотой, равной W

$$Z(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega), \quad (363)$$

где

$$r(\omega) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_c(n) \cos \frac{2\pi n\omega}{W} + r_s(n) \sin \frac{2\pi n\omega}{W},$$

$$x(\omega) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_c(n) \cos \frac{2\pi n\omega}{W} + x_s(n) \sin \frac{2\pi n\omega}{W} . \quad (364)$$

Коэффициенты $r(n)$ и $x(n)$ представляют амплитуды различных гармоник, имеющих форму, показанную на рис. 118, и образующих действительную и мнимую составляющие характеристики $Z(j\omega)$. Индексы c и s означают косинусоидальные (четные) и синусоидальные (нечетные) гармоники, наличие или отсутствие которых зависит от выбора начала отсчета для разложения в ряд Фурье. При решении задач, относящихся к полосовым фильтрам, за начало отсчета сле-

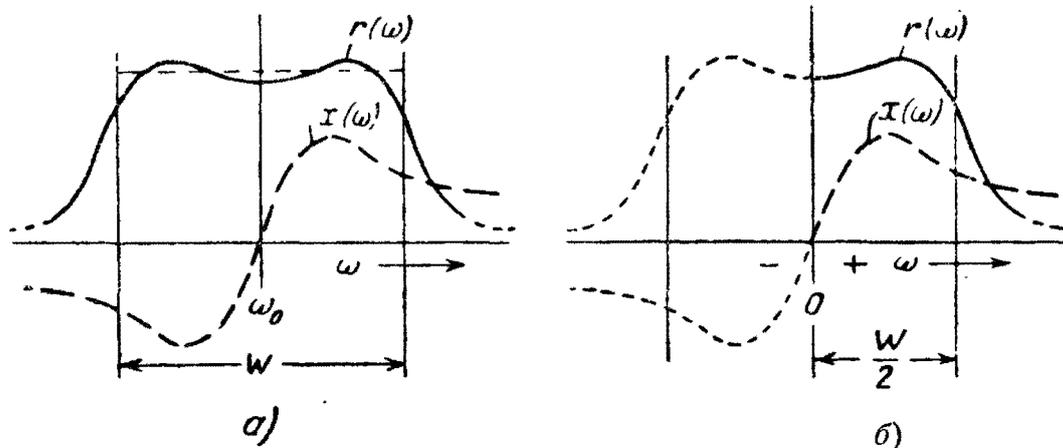


Рис. 123. Графическое представление диапазона частот W для разложения характеристик цепи в ряд Фурье:

а) характеристики полосового фильтра; б) сопряженные характеристики фильтра нижних частот.

дует брать среднюю частоту полосы пропускания, а в случае фильтров нижних частот — нулевую частоту (характеристика должна быть представлена в сопряженной форме, как на рис. 33,2). В последнем случае $r_s(n) = 0$ и $x_c(n) = 0$ вследствие симметрии*.

Разложение в ряд Фурье теоретически возможно во всех случаях, хотя иногда оно является очень трудоемкой задачей. На рис. 123 представлены функции $r(\omega)$ и $x(\omega)$ для полосо-

* Следует заметить, что составляющие $r_c(n) \cos 2\pi n\omega/W$ и $x_s(n) \times \times \sin 2\pi n\omega/W$ образуют составляющую $Y_x(\omega)$ синфазную с несущей, рассмотренную в седьмой главе (каналы с асимметричными боковыми полосами). Аналогично, составляющие $r_s(n) \sin 2\pi n\omega/W$ и $x_c(n) \cos 2\pi n\omega/W$, которые могут возникнуть только при асимметричных характеристиках, образуют составляющую в квадратуре $Y_y(\omega)$, характеризующую искажение формы сигнала. Это наводит на мысль, что если $Y_x(\omega)$ и $Y_y(\omega)$ вычислены, как изложено в главе VII, то фактическое искажение формы сигнала, вызванное асимметрией боковых полос, может быть определено по методу отраженных сигналов.

вого фильтра и фильтра нижних частот. Для простоты мы рассмотрим только характеристики фильтра нижних частот или симметричного полосового фильтра (со средней частотой, приведенной к нулю), когда обычно $X_0 = 0$.

Если $I \cos \omega t$ — одна из составляющих сложного сигнала, поданного на вход цепи, то создаваемое ей напряжение $u(t)$ на выходе будет равно

$$u(t) = Ir_0 \cos \omega t + I \sum_{n=1}^{\infty} r_c(n) \cos \omega t \cos \frac{2\pi n \omega}{W} + \\ + I \sum_{n=1}^{\infty} x_s(n) \sin \omega t \sin \frac{2\pi n \omega}{W},$$

при условии, что $r_s(n) = 0$ и $x_c(n) = 0$.

Это выражение можно написать в виде

$$u(t) = Ir_0 \cos \omega t + \frac{I}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_c(n) \cos \omega \left(t + \frac{2\pi n}{W} \right) + \\ + r_c(n) \cos \omega \left(t - \frac{2\pi n}{W} \right) + \frac{I}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_s(n) \cos \omega \left(t - \frac{2\pi n}{W} \right) - \\ - x_s(n) \cos \omega \left(t + \frac{2\pi n}{W} \right). \quad (365)$$

Выходной сигнал, образуемый каждой гармоникой, содержит составляющую с амплитудой Ir_0 , соответствующую приложенному сигналу $I \cos \omega t$, и две пары отраженных сигналов с амплитудами $(I/2)r_c(n)$ и $(I/2)x_s(n)$, смещенных относительно $t = 0$ на время $\pm 2\pi n/W$. Следует отметить, что отраженные сигналы, создаваемые действительной и мнимой частями $Z(j\omega)$, т. е. $r_c(n)$ и $x_s(n)$, имеющие одинаковый знак при $t > 0$, складываются, а при $t < 0$ противоположные знаки и, следовательно, взаимно уничтожаются.

По физическим соображениям никакого сигнала на выходе до $t = 0$ не должно быть, поэтому сумма отраженных сигналов при $t < 0$ должна быть равна нулю. Отсюда и вытекает равенство $r_c(n) = x_s(n)$, правильность которого была уже показана для характеристик длинной линии. Эти характеристики чисто синусоидальные (рис. 118), и действительная и мнимая части их [выражающиеся уравнениями (348) и (349)] имеют одинаковую амплитуду $R_0/2$.

Результирующий сигнал (уравнение 365) будет, следовательно, содержать составляющую с амплитудой Ir_0 и ряд отраженных сигналов, следующих с запаздыванием на $2\pi n/W$.

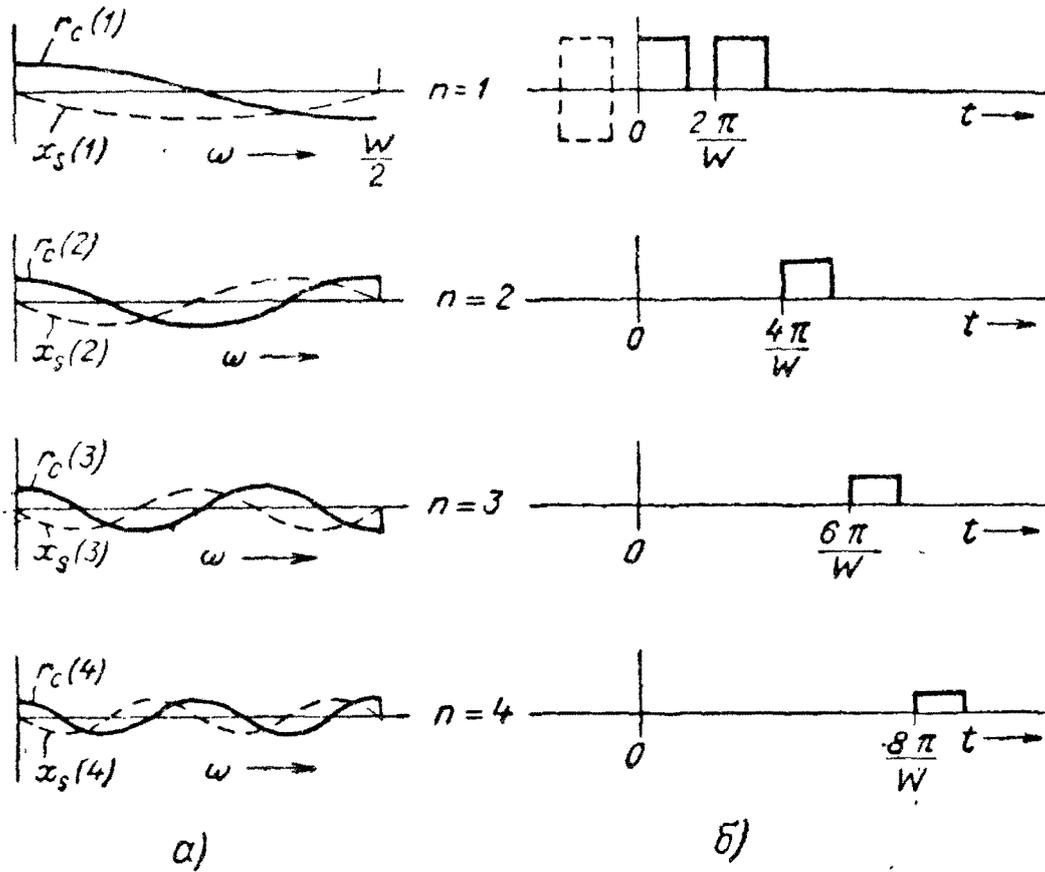


Рис. 124. Составляющие Фурье частотной характеристики цепи и диаграммы соответствующих им отраженных импульсов. При отрицательном t импульс и отраженный сигнал взаимно уничтожаются:
 а) составляющие частотных характеристик; б) диаграммы отраженных импульсов.

Время запаздывания $2\pi n/W$ не зависит от частоты, а только от отношения n/W , являющегося периодом гармоник ряда Фурье, в который разложена характеристика цепи. Таким образом, эти пары отраженных сигналов будут появляться при подаче на вход сигнала любой формы, а не только в случае установившегося сигнала, описанного уравнением (365).

На рис. 124 показано несколько синусоидальных составляющих, соответствующих $n=1, 2, 3, \dots$ и т. д., на которые разложена характеристика некоторой цепи, и отдельные отраженные сигналы*. Отраженные сигналы при $t < 0$ должны в сумме давать нуль. В этом примере для иллюстрации взят подводимый сигнал в форме прямоугольного импульса, показанный вместе с первым отраженным сигналом ($n=1$).

* $x_s(n)$ на этой диаграмме отрицательно.

Отраженные сигналы показаны здесь разделенными, но они могут накладываться друг на друга во многих случаях. Значения их зависят от величин $r_c(n)$ и $x_s(n)$. На рисунке они все положительны.

Каждая пара гармонических составляющих характеристики аналогична составляющим характеристики разомкнутой линии (рис. 118, б) с однократным отражением положительного знака. Иногда характеристика цепи может быть разложена на составляющие, аналогичные представленным на рис. 118, а для короткозамкнутой линии. В таких случаях отраженный сигнал должен иметь знак, противоположный знаку подводимого сигнала. По виду характеристики следует решать какое разложение необходимо применить в каждом конкретном случае.

Чаще применяются модуль и фаза $Z(\omega)$, а не действительная и мнимая часть его.

Они связаны следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{модуль } |Z(\omega)| &= \sqrt{r(\omega)^2 + x(\omega)^2}, \\ \text{фазовый угол } \theta(\omega) &= \frac{x(\omega)}{r(\omega)} \text{ (при малых углах)} \end{aligned} \right\}. \quad (366)$$

Эти величины могут быть использованы для определения амплитудных и фазовых искажений по методу отраженных сигналов. Результаты получаются тем точнее, чем линейнее фазовая характеристика, т. е. при $\theta(\omega) \rightarrow \omega t_1$. Это значит, что метод точен только в тех случаях, когда фазовые искажения малы.

Таким образом ряд Фурье в пределах данного диапазона частот W может быть использован для представления характеристик, причем (в пределах небольших фазовых искажений) синусоидальные кривые модуля и фазового угла соответствуют однократному отражению приложенного сигнала. На рис. 125, а показаны типичные характеристики фильтра, симметричного относительно нуля при средней частоте ω_0 . Пунктирной линией показана фазовая характеристика с постоянной крутизной $d\theta/d\omega = t_1$; по ее виду можно судить, что приложенный и отраженный сигналы будут испытывать линейную задержку, так что ее можно не учитывать при оценке искажений. Фазовые искажения вызываются отклонением $\Delta\theta(\omega)$ фазовой характеристики от этой прямой.

Можно выбрать рабочий диапазон частот W и разложить эти характеристики в ряд Фурье с составляющими, частоты которых равны $W, W/2, W/3, \dots, W/n$ и т. д. На рис. 125, б представлены n -ые гармоники характеристик. Верхняя кривая

показывает синусоидальное изменение модуля $|Z(n)|$, а нижняя — отклонение фазовой характеристики $\Delta\theta(n)$ от линейной. Эти кривые могут быть представлены векторной диаграммой

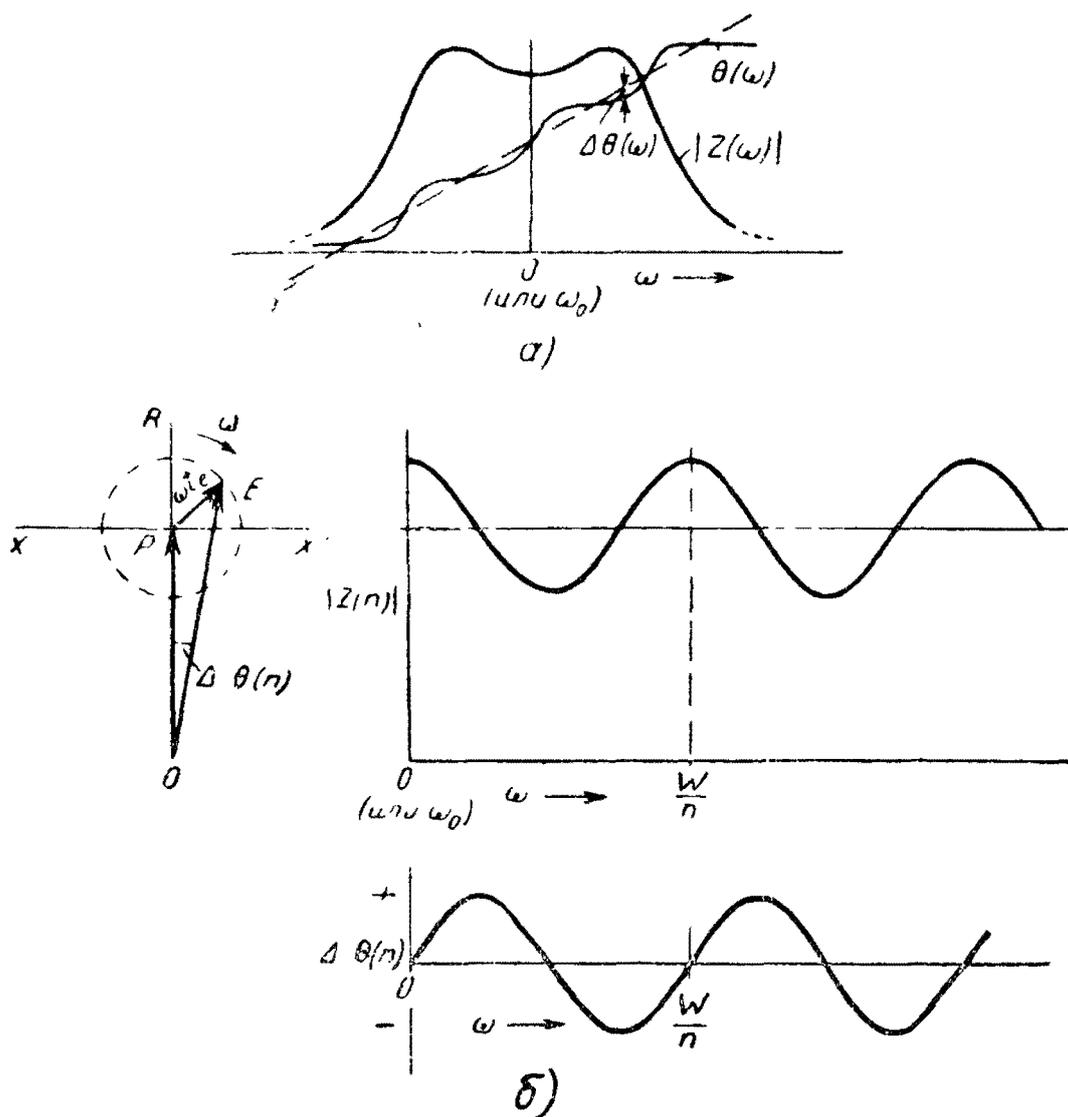


Рис. 125. Иллюстрация зависимости между формой частотных характеристик и искажением сигнала:
 а) характеристики фильтра; б) синусоидальные характеристики модуля и сдвига фазы.

аналогично тому, как делалось для синусоидальных кривых переменного тока и напряжения (см. векторные диаграммы в главе II), но в данном случае векторы должны рассматриваться как вращающиеся не во времени, а по частоте.

Предположим, что OP представляет одну из установившихся составляющих приложенного сигнала $i = I \cos \omega t$, а PE — отраженный сигнал. Если отраженный сигнал запаздывает на время t_e , угол между векторами должен быть

ωt_e . Длины векторов PE и OP пропорциональны величинам отраженного и прямого сигнала.

Если t_e — постоянное время запаздывания отраженного сигнала для каждой составляющей передаваемого сигнала (импульсного или любой другой формы), то фазовый угол между соответствующими составляющими прямого и отраженного сигналов, имеющих частоту ω , должен быть равен ωt_e , т. е. пропорционален ω . Таким образом, при изменении частоты ω вектор PE вращается вокруг точки P .

Результирующий вектор OE представляет сумму этих составляющих. Длина его изменяется почти по синусоидальному закону, вследствие чего конец вектора описывает синусоидальную характеристику модуля при условии, что $PE \ll OP$, т. е., если отношение отраженного сигнала к прямому мало. Аналогично, фазовый угол POE изменяется почти синусоидально и дает синусоидальную фазовую характеристику $\Delta\theta(n)$.

Один период синусоидальных характеристик соответствует одному полному обороту PE или $\omega t_e = 2\pi$. Таким образом, время запаздывания отраженного сигнала будет

$$t_e = \frac{2\pi n}{\omega}. \quad (367)$$

Проекция результирующего вектора OE на действительную ось OR дает действительную составляющую, обозначенную нами $r_c(n)$, а проекция на мнимую ось XPX' дает мнимую составляющую $x_s(n)$

$$\left. \begin{aligned} r_c(n) &= |OP| + |PE| \cos \omega t_e \\ x_s(n) &= |PE| \sin \omega t_e \end{aligned} \right\}. \quad (368)$$

Каждый из векторов этой диаграммы можно представить парой сопряженных векторов. Это, возможно, усложнит диаграмму, но зато покажет, что амплитудные искажения (учитываемые синусоидальной кривой модуля) могут быть представлены двумя сопряженными векторами одного знака, тогда как фазовые искажения (учитываемые синусоидальной фазовой характеристикой) представляются двумя сопряженными векторами противоположных знаков. Сопряженные векторы представляют отраженные сигналы, отстоящие от прямого сигнала на $\pm t_e$. Отраженные сигналы, появляющиеся до момента подачи прямого сигнала, должны быть равны по величине и противоположны по знаку. Векторная диаграмма на рис. 125, б дает представление об этом для $PE \ll OP$.

Если изобразить характеристику модуля в функции отношения PE/OP , то изменения его амплитуды будут равны изменениям фазовой характеристики, так как $\angle POE = = |PE|/|OP|$ радиан. Таким образом, искажения отраженных сигналов вследствие неоднородности амплитудной и фазовой характеристик будут одинаковы, если эти искажения не очень велики. Указанное равносильно одинаковому влиянию действительной и мнимой частей, $r_c(n) = x_s(n)$, как это было уже показано.

Приведенный выше метод анализа часто бывает очень трудоемким, но встречаются случаи, когда искажения сигнала могут быть оценены методом эхо-сигналов по внешнему виду характеристики. Например, характеристики, показанные на рис. 123, имеют в пределах полосы пропускания явно выраженные волнистые верхушки с периодом $W/2$ и величиной P процентов от среднего значения, показанного пунктирной линией. Поэтому можно ожидать, что сигнал на выходе цепи будет состоять из передаваемого сигнала и отраженного сигнала с амплитудой P , отстоящего по времени на $4\pi/W$. Характеристики такой формы могут, например, быть у фильтров промежуточной частоты, состоящих из двух индуктивно связанных резонансных контуров (например, схема на рис. 31,б).

Однократное отражение не может исчерпать всех искажений сигнала, особенно, если его спектр выходит за пределы полосы пропускания. В таких случаях следует считать характеристику прямоугольной или трапециoidalной (рис. 71), что позволяет легко вычислить форму искаженного сигнала. На рисунке представлена форма сигнала, получающегося на выходе цепи при подаче на ее вход скачка напряжения. К этим идеализированным характеристикам можно добавить синусоидальную составляющую с амплитудой в P процентов, что дает довольно хорошее приближение к реальным характеристикам.

Следует подчеркнуть, что для оценки искажений необходимо знать только или действительную или мнимую часть характеристики, так как обусловленные ими отраженные сигналы должны быть одинаковы по форме и величине и иметь противоположные знаки при $t < 0$ и одинаковые при $t > 0$. Это обстоятельство рассматривается подробнее в следующем параграфе, где характеристика цепи выражается интегралом, а не рядом Фурье. Там же будет показано, что всякое представление характеристики в виде ряда, аналогичное сделанному выше, неизбежно будет приближенным, так как

характеристика является непрерывной кривой, простирающейся в область бесконечно высоких частот.

Отдельные, изолированно перемещающиеся в цепи отраженные сигналы (рис. 124) могут возникать только в длинных линиях, а не в цепях с сосредоточенными постоянными. Тем не менее разложение в ряд может оказать большую практическую пользу при рассмотрении ряда схем, например, схем задержки и искусственных линий, в которых может быть ясно выражено явление эхо.

75. Выражение реакции цепи с сосредоточенными постоянными методом отраженных сигналов

Можно представить, что диапазон частот не ограничивается полосой W , как на рис. 123, а простирается до бесконечности. Тогда вместо разложения частотной характеристики $Z(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega)$ в ряд Фурье, содержащий гармоники основной составляющей с периодом $1/W$, необходимо иметь непрерывный спектр таких гармоник.

Соответствующая этому картина отраженных сигналов будет состоять не из ряда отдельных импульсов, отстоящих друг от друга на $2\pi/W$ (рис. 124), а из одного непрерывного сигнала, составляющие которого разделены бесконечно малыми отрезками времени.

Это, конечно, означает, что вместо разложения характеристик в ряд Фурье на участке W , необходимо представить их интегралом Фурье. Если характеристики выражаются рядом Фурье, их можно представлять бесконечно повторяющимися с периодом W , причем части, лежащие за пределами W , не имеют значения. Члены ряда Фурье представляют амплитуды отраженных сигналов. Если передаваемый сигнал является импульсом бесконечно малой длительности, то картина отраженных сигналов будет содержать ряд таких импульсов, разделенных интервалами $2\pi/W$, который можно рассматривать как временной спектр (рис. 126, а) характеристики. При $W \rightarrow \infty$ интервал $2\pi/W$ приближается к нулю, и отраженные сигналы сливаются, образуя непрерывный сигнал $F(t)$ (рис. 126, б). Этот сигнал выражается интегралом Фурье от частотной характеристики.

Интересно определить физический смысл интеграла Фурье от семейства частотных характеристик.

Это было уже сделано в § 43, где было показано, что такой интеграл представляет сигнал на выходе цепи, создаваемый поданным на ее вход импульсом бесконечно малой длительности. Это можно показать следующим образом.

Бесконечно узкий импульс имеет равномерный спектр, все составляющие которого имеют одинаковую величину

(стремящуюся к нулю с уменьшением длительности импульса). Если этот импульс подается на вход цепи с полным сопротивлением $Z(j\omega)$, то сигнал на выходе ее будет иметь спектр $Z(j\omega)$, т. е. идентичный с характеристикой цепи. Таким образом, этот сигнал будет выражаться интегралом Фурье от $Z(j\omega)$ и, наоборот, $Z(j\omega)$ является интегралом Фурье от сигнала, создаваемого импульсом бесконечно малой длительности, а оба интеграла образуют преобразование Фурье*.

Кривую сигнала $F(t)$ на рис. 126, б можно рассматривать состоящей из бесконечного числа соприкасающихся импульсов длительностью δt (стремящейся к нулю), один из которых

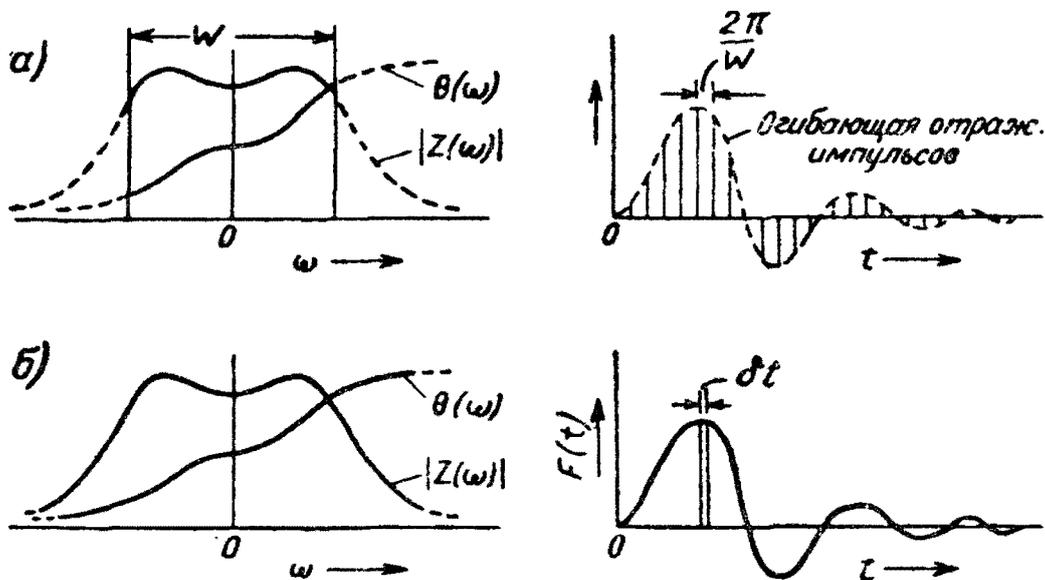


Рис. 126. Форма сигнала на выходе цепи с характеристиками $|Z(\omega)|$ и $\theta(\omega)$ при возбуждении бесконечно узким импульсом, представленная в виде ряда Фурье и интеграла Фурье:

а) ряд Фурье для характеристик с ограниченной полосой пропускания $\pm W/2$; б) интеграл Фурье для всего диапазона частот.

показан на рисунке. Каждый такой элементарный импульс можно считать отражением импульса, приложенного к цепи. Если на вход цепи подан не бесконечно узкий импульс, а сигнал какой-нибудь другой формы, например, $f(t)$, то форму сигнала на выходе можно воспроизвести, если заменить каждое отражение от импульса отражениями от сигнала $f(t)$ с соответствующими амплитудами. Это легко показать в случае представления сигнала рядом Фурье (рис. 126, а), но если он выражается интегралом Фурье, то непрерывный ряд отражен-

* Взаимные отношения между функцией и интегралом Фурье от нее рассматривались в § 22. Данный пример представляет очень простое физическое толкование этой зависимости.

ных сигналов можно выразить только условно с помощью оператора.

Пусть $F(t)$ (рис. 126, б) сигнал, создаваемый импульсом на выходе цепи с сопротивлением $Z(j\omega)$. Тогда $F(t)$ и $Z(j\omega)$ будут преобразованиями Фурье. Операция замены соприкасающихся отраженных импульсов, образующих сигнал $F(t)$ (т. е. ординат кривой), отраженными сигналами от $f(t)$ может быть записана так

$$\varphi(t) = f(t) \times F(t), \quad (369)$$

где $\varphi(t)$ — выходной сигнал при возбуждении цепи сигналом $f(t)$. Знак \times означает условно, какую операцию необходимо при этом проделать. Это поясняется дальше рис. 127, где $f(t)$ — сигнал, поданный на вход цепи, а $F(t)$ — сигнал, вызываемый на ее выходе импульсом бесконечно малой длительности и разделенный на соприкасающиеся импульсы длительности δt (стремящейся к нулю).

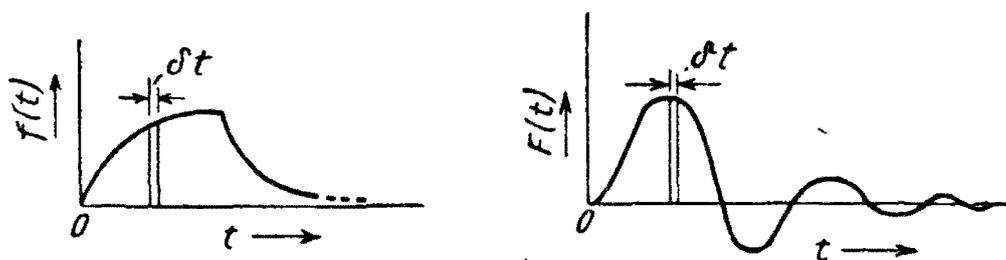


Рис. 127. Иллюстрация к определению формы выходного напряжения методом отраженных сигналов.

Операцию, выраженную уравнением (369), можно произвести в обратном порядке. Можно разделить сигнал $f(t)$ на бесконечное число соприкасающихся импульсов длительностью δt , как показано на рисунке. Тогда сигнал на выходе цепи, создаваемый $f(t)$, получится путем сложения сигналов, создаваемых такими импульсами, каждый из которых имеет форму $F(t)$. Это можно рассматривать, как сложение отраженных сигналов, так как каждый импульс, на которые мы разделили $f(t)$, заменен отраженным сигналом $F(t)$ и каждый отраженный сигнал имеет амплитуду, пропорциональную первоначальному импульсу. Эту операцию можно представить так:

$$\varphi(t) = F(t) \times f(t). \quad (370)$$

Отсюда следует, что метод отраженных сигналов, как метод анализа переходных процессов, вытекает непосредственно из теоремы суперпозиции и состоит в сложении ряда сигналов, вызываемых импульсами. Ряд нужно взять бесконечным

для точного решения и конечным для большинства практических случаев.

Очень важно отметить, что частотные характеристики, например, изображенные на рис. 126, могут представлять или поведение некоторой физической цепи в установившемся режиме, или спектр какого-то кратковременного сигнала. Этот кратковременный сигнал является выходным сигналом, создаваемым поданным на вход цепи бесконечно узким импульсом (преобразование Фурье). Процессы в цепи могут определяться двумя способами: или по характеристикам установившегося режима, или по реакции на кратковременный сигнал известной формы. Любой из этих способов достаточен для вычисления или оценки реакции цепи на любой другой сигнал на основе принципа суперпозиции. Простейшим кратковременным сигналом является импульс бесконечно малой длительности, но чаще применяется скачкообразный сигнал или единичная функция Хевисайда. Импульс можно рассматривать как производную от скачка* и сигналы, создаваемые на выходе цепи этими элементарными сигналами, связаны таким же соотношением (см. § 44).

Показанное соотношение между поведением цепи в установившемся режиме и при воздействии на нее импульса является физической иллюстрацией общего принципа преобразования Фурье. И в том и в другом случае кривые характеризуют поведение цепи, но в одном случае сигнал представляется в функции от частоты, а в другом — от времени. На основании этого можно назвать статическую характеристику $Z(j\omega)$ частотной, а кривую сигнала $F(t)$, создаваемого импульсом — временной характеристикой.

76. Обратные соотношения между частотной и временной характеристиками

Применение обратных соотношений между преобразованиями Фурье, к частотной и временной характеристикам позволяет сделать несколько интересных сравнений. Из обратных соотношений между преобразованиями Фурье вытекает следующее (см. § 22, примечание В): если $F(t)$ — интеграл Фурье от $Z(j\omega)$, то $Z(j\omega)$ является интегралом Фурье от $F(t)$. Переменные t и $f = \omega/2\pi$ могут взаимно заменяться. При этом следует отметить, что t имеет размерность $1/f$. Простой пример может пояснить значение сказанного. На рис. 128,а показана простая синусоидальная кривая — синусоидальная

* Это верно относительно его формы, но не абсолютной величины.

переменная Э. д. с. — и соответствующая ей векторная диаграмма в виде двух сопряженных векторов. Здесь же показан ее частотный спектр, состоящий из двух сопряженных составляющих с частотами $\pm 1/T$. На рис. 128,б приведены такие же диаграммы, но время заменено на них частотой, и наоборот.

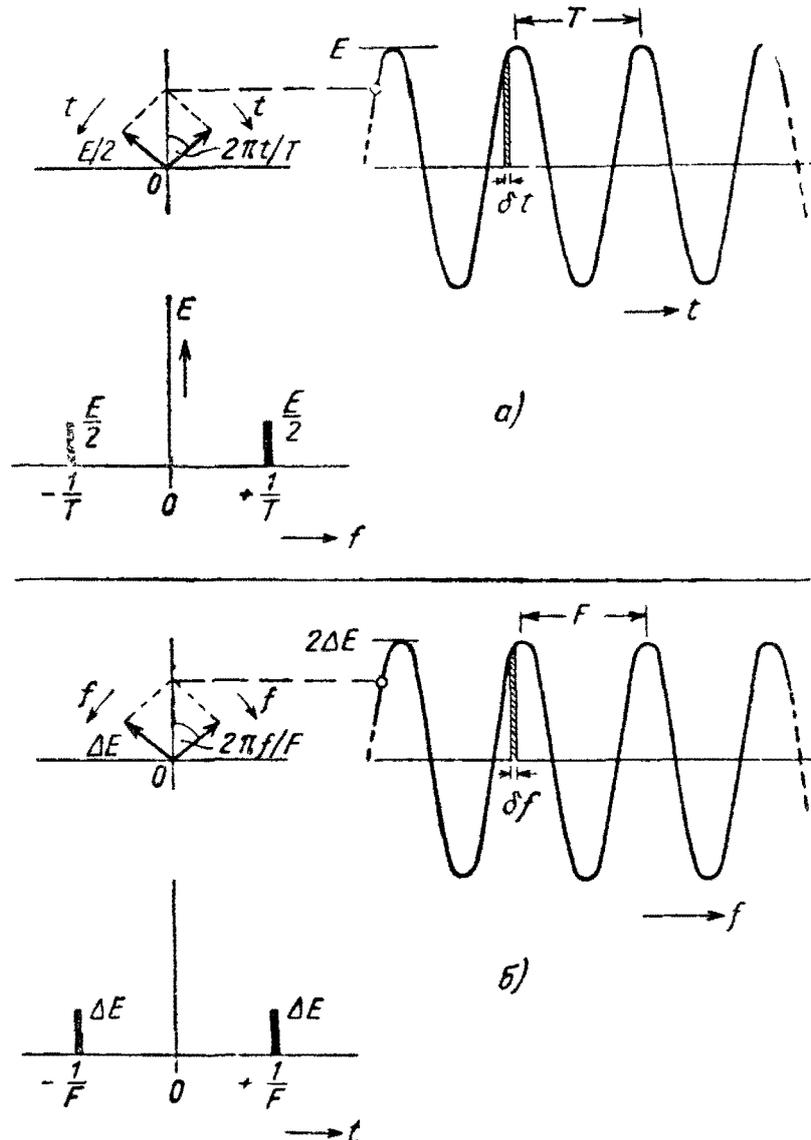


Рис. 128. Сравнение функций времени и частоты:
а) синусоидальное колебание; б) синусоидальный спектр.

Синусоидальная кривая представляет теперь синусоидальный частотный спектр, непрерывный в пределах $\pm \infty$ и изображается двумя сопряженными векторами, вращающимися не по времени, а по частоте (так же, как на рис. 125). „Спектр“ этой кривой (т. е. ряда или интеграла Фурье) содержит опять две составляющих, но они отстоят по времени друг от друга на $\pm 1/F$ (где F — „период“ кривой). Аналогия полная и точная.

Этот „спектр“ состоит просто из двух импульсов; поэтому можно рассматривать спектр синусоидальной кривой на рис. 128,а, как два частотных „импульса“. Легко показать, что два таких импульса, разделенных интервалом $\pm 1/F$, имеют синусоидальный спектр, если принять, что одиночный импульс бесконечно малой длительности имеет непрерывный равномерный спектр из косинусоидальных членов вида $\Delta E \cos \omega t$, где ΔE — бесконечно малая амплитуда. Спектр двух импульсов выразится при этом как

$$\Delta E \left[\cos \omega \left(t - \frac{1}{F} \right) + \cos \omega \left(t + \frac{1}{F} \right) \right] = 2\Delta E \cos \frac{\omega}{F} \cos \omega t. \quad (371)$$

Это спектр косинусоидальных составляющих, изменяющихся с частотой по закону $2\Delta E \cos \omega/F$, как показано на рис. 128,б. Следует помнить, что между диаграммами а и б имеется соответствие не количественное, а только по форме диаграмм.

Синусоидальная кривая переменной э. д. с. на рис. 128,а может быть разделена на ряд соприкасающихся импульсов, длительностью $\delta t \rightarrow 0$, а синусоидальный спектр на рис. 128,б — на аналогичные участки, каждый из которых представляет синусоидальную составляющую с амплитудой, выражаемой уравнением (371). Импульс и синусоидальная кривая являются естественными спутниками на временной и частотной шкалах.

Другой интересной особенностью является аналогия, вытекающая из теоремы о приведении несущей частоты к любой другой, включая нулевую (см. § 16). Эта теорема устанавливает, что спектр амплитудно-модулированных колебаний (имеющих любую огибающую) подобен спектру огибающей, с той лишь разницей, что первый симметричен относительно несущей, а второй — относительно нулевой частоты.

На рис. 18 были показаны „приведенные“ спектры. Рассмотрим вопрос о взаимозамене частоты и времени в этой теореме.

На рис. 129,а показаны три импульса, симметричных относительно $t = 0$. Спектр этой группы импульсов состоит из непрерывного ряда косинусоидальных членов; член с частотой ω выражается как

$$\begin{aligned} \Delta E \left[\cos \omega t + \frac{m}{2} \cos \omega \left(t - \frac{1}{F} \right) + \frac{m}{2} \cos \omega \left(t + \frac{1}{F} \right) \right] = \\ = \Delta E \left(1 + m \cos \frac{\omega}{F} \right) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (372)$$

Этот спектр имеет форму синусоиды, наложенной на постоянную составляющую с амплитудой ΔE . График его аналогичен графику, получающемуся при сложении переменной и постоян-

ной составляющих (рис. 19,а); он приведен на рис. 129,а. Каждая ордината представляет косинусоидальную составляющую.

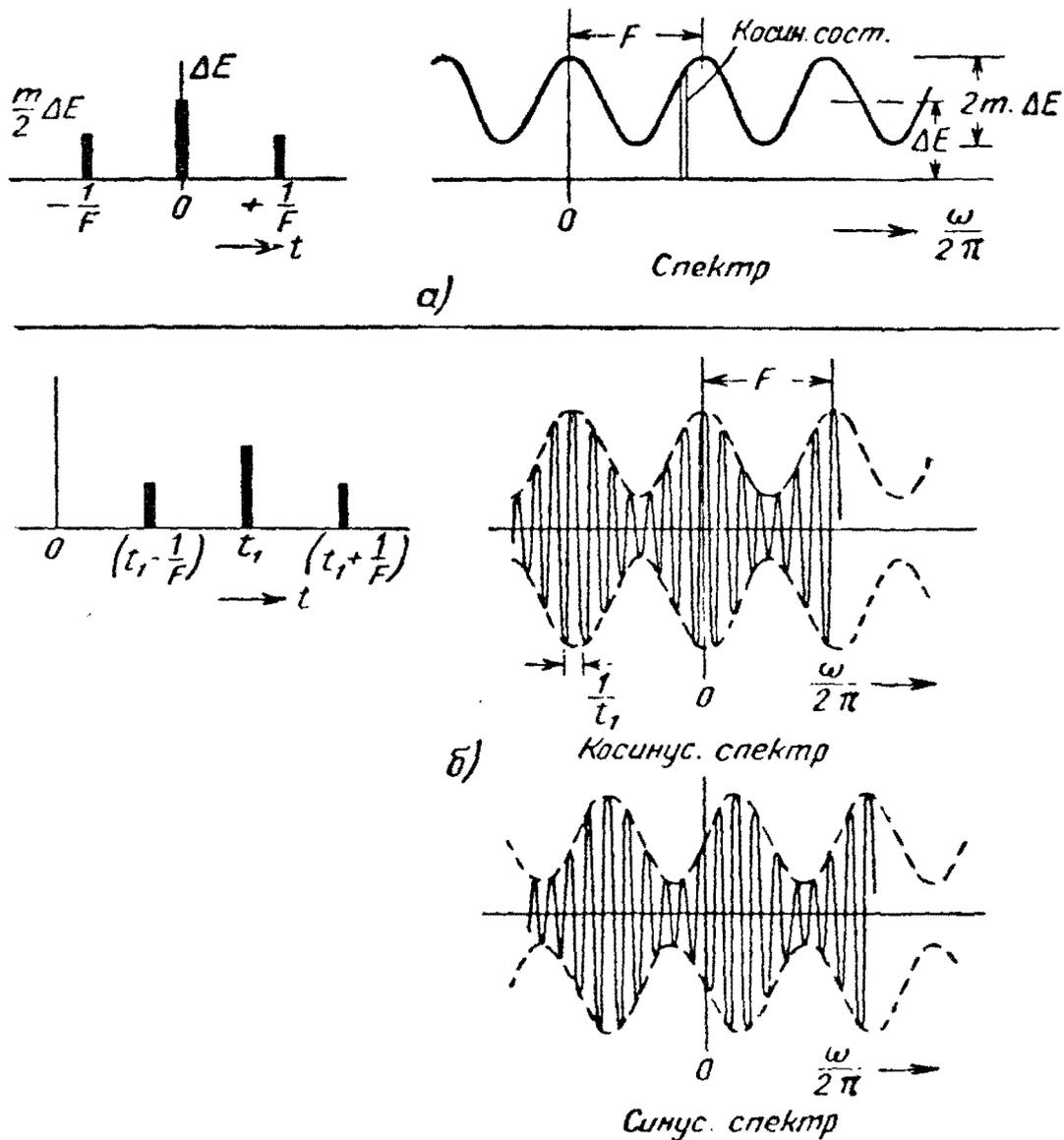


Рис. 129. Перенос спектра импульса по оси времени (аналогия к принципу приведения несущей частоты к нулю):
 а) импульсы, симметричные по отношению к $t=0$; б) спектры модулированных колебаний.

Перенос начала отсчета времени в точку $t=t_1$ дает группу импульсов (рис. 129,б), форма спектра которой будет

$$\Delta E \left(1 + m \cos \frac{\omega}{F} \right) \cos \omega (t - t_1). \quad (373)$$

Это уравнение получается из (372) при перенесении начала отсчета времени. Но это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \Delta E \left[\left(1 + m \cos \frac{\omega}{F} \right) \cos \omega t_1 \right] \cos \omega t + \\ & + \Delta E \left[\left(1 + m \cos \frac{\omega}{F} \right) \sin \omega t_1 \right] \sin \omega t, \end{aligned} \quad (374)$$

т. е. в виде суммы спектров косинусоидальных и синусоидальных членов. Каждый из этих спектров имеет форму „модулированных колебаний“ с периодом несущей $1/t_1$ и периодом „огibaющей“ F , также показанными на рис. 129,б.

Это очень сходно с теоремой о приведении несущей частоты модулированных колебаний. Тот же самый процесс может быть применен к паре импульсов, обладающих симметрией 2-го рода относительно центральной составляющей. При этом изменяется только фаза „огibaющей“ спектра относительно нулевой частоты. Можно построить векторные диаграммы для этих трех импульсов так же, как это было сделано на рис. 128.

Проекции векторов на неподвижную ось будут давать рассмотренные выше синусоидальные спектры. Эти векторные диаграммы аналогичны диаграммам, представляющим обычные амплитудно-модулированные колебания (рис. 20), но время и частота в них меняются местами.

ПРИЛОЖЕНИЕ
„ВЕРОЯТНОСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА“

В § 53 главы VI было установлено, что общая частотная характеристика N -каскадного усилителя на тетродах с нагрузкой в анодной цепи в виде активного сопротивления, шунтированного емкостью, выражается как

$$|Z(\omega)| = |Z(0)| (1 + \omega^2 C^2 R^2)^{-N/2}, \quad [(249)]$$

где $|Z(0)| = (SR)^N$ — значение при нулевой частоте. Характеристики показаны на рис. 82,а для N от 1 до 6. Кривые на этом рисунке вычерчены в сопряженной форме чтобы их можно было применить к эквивалентным схемам с полосовыми фильтрами, т. е. к усилителям с нагрузкой в виде резонансного контура, зашунтированного активным сопротивлением. Далее было принято, что эта характеристика при $N \rightarrow \infty$ переходит в „вероятностную“ характеристику, выражаемую уравнением (236), и изображенную на рис. 82,а пунктирной линией.

Это можно доказать следующим образом. В приведенном выше уравнении (249) можно сохранить ширину полосы постоянной и равной ω_1 , при которой $|Z(\omega)| = |Z(0)|/\sqrt{2}$, если, как было показано в § 53, CR будет функцией от N . Требуемая зависимость дается уравнением (250). Подстановка его в уравнение (249) для общей частотной характеристики усилителя дает

$$|Z(\omega)| = |Z(0)| \cdot \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} (2^{1/N} - 1) \right]^{-N/2}. \quad (A.1)$$

Можно показать, что

$$(2^{1/N} - 1) \rightarrow \frac{\ln 2}{N} \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (A.2)$$

если представить $(2^{1/N} - 1)$ в виде

$$2^{1/N} - 1 = e^{(1/N) \ln 2} - 1$$

и разложить в ряд $e^{(1/N) \ln 2}$

$$e^{(1/N) \ln 2} = 1 + \frac{\ln 2}{N} + \frac{(\ln 2)^2}{N^2 2!} + \dots$$

При $N \rightarrow \infty$ это выражение стремится к $1 + \frac{\ln 2}{N}$. Подстановка этого значения вместо $2^{1/N}$, а также $\ln 2 = 0,69$ в уравнение (А.1) дает

$$|Z(\omega)| = |Z(0)| \left[1 + \frac{2}{N} \left(\frac{\omega}{1,7\omega_1} \right)^2 \right]^{-\frac{N}{2}}. \quad (\text{А.3})$$

Второй множитель правой части может быть выражен через показательную функцию, так как по определению

$$e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N} \right)^N. \quad (\text{А.4})$$

Следовательно, при $N \rightarrow \infty$ уравнение (А.3) принимает вид

$$|Z(\omega)| = |Z(0)| e^{\left(-\frac{\omega}{1,7\omega_1} \right)^2}, \quad (\text{А.5})$$

т. е. переходит в уравнение „вероятностной“ характеристики [уравнение (236)].

Такое аналитическое выражение для характеристик очень полезно для приближенных расчетов, как было показано в главе VI. Хотя оно представляет теоретическую частотную характеристику усилителя с бесконечным числом одинаковых каскадов, но практически при сравнительно небольшом числе каскадов дает достаточную точность, так как выражение (А.1) быстро сходится при увеличении N .

ЛИТЕРАТУРА

В список литературы введены дополнительно работы советских авторов, посвященных вопросам переходных процессов и теории цепей, а также переводная литература.

1. Б. П. А с е е в, Основы радиотехники. Связьиздат, 1947 г.
2. К. А. К р у г, Переходные процессы в линейных электрических цепях. Госэнергоиздат, 1948 г.
3. С. И. Е в т я н о в, Переходные процессы в приемно-усилительных схемах. Связьиздат, 1948 г.
4. Я. С. И ц х о к и, Импульсная техника. „Советское Радио“ 1949 г.
5. В. И. С и ф о р о в, Радиоприемные устройства. Связьиздат, 1939 г.
6. А. А. К о л о с о в, Резонансные системы и резонансные усилители. Связьиздат, 1940 г.
7. М. И. К о н т о р о в и ч, Операционное исчисление* и нестационарные явления в электрических цепях. Гостехиздат, 1949 г.
8. А к у л ь ш и н, К о щ е е в и К у л ь б а ц к и й, Теория связи по проводам. Связьиздат, 1940 г.
9. Т. Е. Ш и, Четырехполюсники и электрические фильтры. Гостехиздат, 1939 г.
10. Т. К а р м а н и М. Б и о, Математические методы в инженерном деле. Гостехиздат, 1946 г.
11. Д. Р. К а р с о н, Электрические нестационарные процессы и операционное исчисление. ДНТВУ, 1934 г.
12. М. Ф. Г а р д н е р и Д ж. Л. Б э р н с, Переходные процессы в линейных системах. Гостехиздат, 1949 г.
13. Г. Б о д е, Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. Госиноиздат, 1948 г.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

ab, cd, ef	зажимы цепи;
a_0, a_n, b_n	амплитуды косинусоидальных и синусоидальных составляющих ряда Фурье;
$a(\omega), b(\omega)$	косинусоидальная и синусоидальная составляющие огибающей непрерывного спектра;
$\beta = \sqrt{(R^2/4L^2) - (1/LC)}$	угловая частота затухающих колебаний;
δ	коэффициент затухания;
B	ширина полосы;
C, S	косинусоидальные и синусоидальные составляющие (колебаний или характеристик);
$C_v = C_{ak} + C_{ck}$	полная междуэлектродная емкость лампы;
$e, e(t)$	мгновенное значение э. д. с.;
e_E	огibaющая кривой напряжения;
e	основание натуральных логарифмов;
η	отношение амплитуды боковой частоты к несущей;
f	частота;
(t)	функция, представляющая форму колебаний; $f_c(t), f_s(t)$ — четные и нечетные составляющие;
G	общее усиление усилителя при нулевой (или средней) частоте;
ΔG	падение усиления;
S	крутизна характеристики лампы;

$\gamma = A + jB$	постоянная распространения (передачи);
R, L, G и C	постоянные цепи (сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость);
$h(t)$	переходная функция — сигнал, создаваемый на выходе цепи единичным скачком;
I, U	амплитуды тока и напряжения;
$i, i(t)$	мгновенное значение тока;
I_E	изменяющаяся амплитуда несущей;
I_0	постоянная составляющая тока; установившееся значение тока; начальный ток;
j	оператор, $j^2 = -1$;
$K = T_0/T_1$	скважность следования импульсов;
k	коэффициент частотного отклонения; также L/CR^2 ;
k'	коэффициент фазового отклонения;
l	длина линии или кабеля;
m	постоянная; также глубина модуляции;
μ	коэффициент усиления лампы;
N	целое число; число звеньев цепи или число усилительных каскадов;
n	номер гармоники;
OA, OB	длина вектора на векторной диаграмме;
$\Omega = \omega CR$	относительная частота;
$\omega = 2\pi f$	круговая частота;
ω_1	идеализированная частота отсечки;
ω_m	частота составляющей модулирующих колебаний;
ω_0	несущая частота;
ω_s	частное значение частоты;
ω'	мгновенное значение частоты;
φ, θ	фазовый угол;
Q	добротность цепи;
q_0	начальный заряд конденсатора;
ROR'	ось действительных величин;
SOS'	ось мнимых величин;

T_0	период повторения импульсов;
T_1	длительность импульса;
t_1	время задержки;
τ	частное значение времени t ;
$u, u(t)$	мгновенное значение напряжения (обычно выходного);
W	диапазон частот;
X	реактивное сопротивление;
x	геометрическое расстояние;
$[X]$ и $[Y]$	составляющие колебаний (синфазная и в квадратуре при однополосной передаче);
$Z, z(\omega)$	полное сопротивление;
$Y_x(\omega) = g_x(\omega) + jb_x(\omega)$	комплексные проводимости цепи, син- фазная составляющая и составляю- щая в квадратуре (при однополос- ной передаче);
$Y_y(\omega) = g_y(\omega) - jb_y(\omega)$	
Y_b, Y_u	проводимость цепи относительно ниж- ней и верхней боковых полос.
$\ddot{}$	пропорциональные величины.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловии	3
Глава I. Основы анализа процессов в электрических цепях . .	5
1. Введение	5
2. Основные законы для электрических цепей	7
3. Физический смысл решения уравнений электрической цепи	12
4. Собственные и вынужденные колебания в цепи	17
5. Собственные колебания замкнутого контура	18
6. Модулированные колебания и огибающая	31
7. Вынужденные колебания и общий ток в контуре	33
8. Применение методов исследования установившегося ре- жима к изучению переходных процессов. Понятие о пол- ном сопротивлении цепи	34
Глава II. Частотные спектры модулированных колебаний и различного вида импульсов	39
9. Незатухающие синусоидальные колебания; их применение в теоретическом анализе и практике	39
10. Вектор переменной э. д. с. Тригонометрическая и показа- тельная формы его записи	40
11. Сопряженные векторы	43
12. Частотный спектр простого синусоидального колебания . .	45
13. Векторные диаграммы и частотные спектры несинусоидаль- ных колебаний	47
14. Периодические кривые. Гармонические составляющие ряда Фурье	51
15. Амплитудно-модулированные колебания	53
16. Приведение несущей частоты к нулю	56
17. Несущие колебания, модулированные по частоте и фазе. Некоторые определения и различия	59
18. Векторные диаграммы установившихся процессов при частот- ной и фазовой модуляции	61
19. Спектры колебаний, модулированных по частоте и фазе . .	62
20. Разложение периодических кривых в ряд Фурье	64
21. Частотные спектры импульсов и одиночных возмущений. Интеграл Фурье	72
22. Несколько теорем о форме кривых переходных процессов и их частотных спектров	82
Глава III. Характеристики установившихся процессов в цепях	85
23. Характеристики цепей	85
23. Определение характеристик двух- и четырехполюсников	89

25. Характеристики в сопряженной форме	93
26. Действительные и мнимые составляющие характеристик цепи	97
27. Последовательное соединение четырехполюсников	99
28. Эквивалентные цепи и цепи-двойники	100
29. Характеристики двухполюсников	105
30. Симметричные и асимметричные характеристики	115
31. Симметрия характеристик фильтра в логарифмическом масштабе	118
32. Влияние поглощения энергии на форму характеристик	120
33. Преобразование фильтра нижних частот в эквивалентный полосовой фильтр	125
Глава IV. Переходные процессы в электрических цепях	130
34. Качество передачи в каналах связи	130
35. Анализ переходных процессов с помощью характеристик для установившегося режима	136
36. Пример применения интеграла Фурье к анализу переходных процессов	143
37. Некоторые приемы расчета переходных процессов. Замена интеграла Фурье рядом Фурье	145
38. Условия неискаженной передачи сигнала в канале связи	150
39. Амплитудные и фазовые искажения	152
40. Запаздывание несущей и огибающей	155
41. Воспроизведение сигнала, модулированного по амплитуде, и его огибающей	159
42. Теорема суперпозиции. Определение реакции цепи на сигнал сложной формы по известной реакции на элементарный сигнал	161
43. Реакция цепи на очень короткие импульсы	165
44. Последовательное дифференцирование и интегрирование функций	168
Глава V. Идеализация характеристик	171
45. Обоснование необходимости применения идеализации	171
46. Идеализация полосы пропускания и времени нарастания сигнала	173
47. Идеализация характеристик, дающая при $t < 0$ сигнал, равный нулю	179
48. Реакция идеализированного фильтра на короткие импульсы	181
49. Влияние хвостов частотных характеристик	182
50. Формирование сигнала элемента телевизионного изображения	185
51. Реакция на импульс помехи цепи, расстроенной относительно этого импульса	191
Глава VI. Характеристики многокаскадных усилителей	195
52. Суммарная частотная характеристика многокаскадного усилителя	195
53. Идеализированные характеристики многокаскадных усилителей	199
54. Многокаскадные усилители с неизменной формой сигнала на выходе каждого каскада	203
55. Предельные скорости переходных процессов в усилителе	208
56. Постоянство произведения ширины полосы на коэффициент усиления	217
	331

57. Оптимальное количество каскадов усиления	221
58. Отношение сигнала к шуму и оптимальная ширина полосы	223
Глава VII. Каналы с асимметричными боковыми полосами	232
59. Передача на одной боковой полосе, ее применение и особенности	232
60. Модуляция чистым тоном	236
61. Однополосная передача при полном подавлении одной из боковых полос	241
62. Эквивалентные модуляционные характеристики	246
63. Расстроенный резонансный усилитель	250
64. Модуляция прямоугольной огибающей	254
65. Модуляция непериодическим сигналом. Эквивалентные модуляционные характеристики	264
66. Простой метод получения эквивалентных характеристик	267
67. Огибающие с высокой скоростью нарастания	270
Глава VIII. Отражение и эхо-сигналы в длинных линиях и цепях с сосредоточенными постоянными	273
68. Примеры возникновения отражения	273
69. Цепи с сосредоточенными и распределенными постоянными	276
70. Длинная линия без отражения	281
71. Длинная линия с отражением	287
72. Частотные характеристики линии с отражением	293
73. Отражение в искусственной линии. Цепь задержки	298
74. Анализ переходных процессов по методу парных отраженных сигналов	306
75. Выражение реакции цепи с сосредоточенными постоянными методом отраженных сигналов	316
76. Обратные соотношения между частотной и временной характеристиками	319
Приложение	324
Литература	326
Обозначения	327



Редактор А. А. Кокушкин

Техн. редактор А. Н. Уразова

Г70204 Подписано к печати 10/III 1951 г.
29,75 печ. лист. 17,58 уч.-изд. листов

Бумага 60×92¹/₁₆ 10,37 бум. лист.
Заказ 350 Цена 15 руб.

Типография Госэнергоиздата. Москва, Шлюзовая наб., 10

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
69	3 сверху	$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \begin{matrix} a_n \cos \\ b_n \cos \end{matrix} \right\} \frac{2\pi n t}{T_0},$	$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \begin{matrix} a_n \cos \\ b_n \sin \end{matrix} \right\} \frac{2\pi n t}{T_0},$
69	6 сверху	$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \frac{2\pi n t}{T_0} dt$	$\left. \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \times \\ \times \frac{2\pi n t}{T_0} dt$
71	4 сверху	$b_n \sin \frac{2\pi n t}{T_0} = \\ = \frac{a_n}{2} (e^{j\omega n t} - e^{-j\omega n t}),$	$b_n \sin \frac{2\pi n t}{T_0} = \\ = \frac{b_n}{2j} (e^{j\omega n t} - e^{-j\omega n t}),$
127	1 снизу	$r + j(\omega L/2) - (1/2\omega C),$	$r + j(\omega L/2 - 1/2\omega C),$
200	3 снизу	$CR = \omega_1 \sqrt{(2^{1/N} - 1)}$	$CR = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{1^{1/N} - 1}$
256	10 сверху	<p>Рис. 105. Векторные диаграммы и сложной форме огибающей в бесконечном числе боковых частот (а) и их результирующие (б):</p>	<p>Рис. 105. Векторные диаграммы при сложной форме огибающей и бесконечном числе боковых частот (а) и их результирующие (б):</p>

Переходные процессы в электрических цепях при передаче импульсов.